

あらい剛体平面で圧縮される弾性平板の二次元応力問題⁽¹⁾

斎 藤 秀 雄⁽²⁾

On the Two Dimensional Problem of a Rectangular Plate Compressed by Rough Rigid Planes

by Hideo SAITO

In this study, the stress distributions in a rectangular plate of elastic material are obtained, in the case where two opposite edges are compressed by rough rigid planes in such a way that there are uniform normal displacements and no tangential displacements while the other two opposite edges are left free.

Using a stress function in the form of trigonometric series, the boundary conditions are satisfied. Numerical calculations are carried out for a square plate.

1. 緒 論

圧縮試験において試験機にうけた平面の間で試験片を圧縮する場合には一般に圧縮力は断面内に一様に分布すると仮定するのであるが、たとえ両面が完全に密着したとしても試験片と試験機のおさえ板との間の摩擦抵抗のためこの部の圧縮に伴う横への膨張が止められ、実際の応力は非常に複雑となる。また摩擦力なしとして求めた見掛けの弾性率と真の弾性率との差異はなかなか面白い結果を与えるものと思われる。このことに関しては従来より研究者の目を引き多くの実験が行われているが、一方理論計算に関しても Filon⁽³⁾, Knein⁽⁴⁾ 等の研究があり、また最近においても Prager-Synge の近似方法を用いた研究^{(5),(6)} が二、三見られるようである。本文においても上の研究の数種と同じく、表題の問題を二次元的に取扱うものであるがその境界条件を Fourier 級数を用いて正確に満たすことを試みたものである。一般の場合は自由にすべる場合と全然すべらぬ場合の中間に位置することはもちろんである。

2. 解 の 方 法

座標として直角座標 (x, y) を用い、 u, v をそれらの方向の変位とする。応力かん数として ϕ をとれば応力および変位は平面応力状態において

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ 2Gv &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

で与えられる。ここに ϕ, ψ は

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0, \quad \dots (3)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y},$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \dots (3')$$

を満足するかん数であり、また G は剛性率、 ν は Poisson 比である。

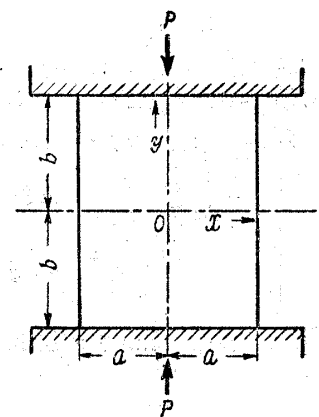
今第 1 図に示すように、試験片の幅を $2a$ 、高さを $2b$ 、厚さを 1 と考え座標の原点を試験片の中心に取れば境界における条件は

$$\left. \begin{aligned} x = \pm a \text{ では } \sigma_x = \tau_{xy} &= 0, \\ y = \pm b \text{ では } u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

また $\int_{-a}^a \sigma_y dx = -P$

となる。ただし P は圧縮力である。

さて(3)を満足する ϕ の形として次のものをとろう。



第 1 図 圧縮試験片

$$\phi = \frac{P}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(\xi_n/a)^2 \Delta_n^{(1)}} \left[\left\{ \frac{2}{1+\nu} \cosh \xi_n t + \xi_n t \sinh \xi_n t \right\} \cosh \xi_n \frac{y}{a} - \xi_n \frac{y}{a} \cosh \xi_n t \sinh \xi_n \frac{y}{a} \right] \cos \xi_n \frac{x}{a} \\ + \frac{P}{2a} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{(\xi_s/b)^2 \Delta_s^{(2)}} \left[\xi_s t' \sinh \xi_s t' \cosh \xi_s \frac{x}{b} - \xi_s \frac{x}{b} \cosh \xi_s t' \sinh \xi_s \frac{x}{b} \right] \cos \xi_s \frac{y}{b}, \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに $\xi_n = \{(2n+1)\pi\}/2$, $t=b/a$, $t'=a/b$.

$$\Delta_n^{(1)} = \xi_n t + \cosh \xi_n t \sinh \xi_n t, \quad \Delta_s^{(2)} = \xi_s t' + \cosh \xi_s t' \sinh \xi_s t'. \quad \dots\dots\dots (5')$$

更に応力および変位は (1), (2) を用いて

$$\sigma_x = \frac{P}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\Delta_n^{(1)}} \left[\left(-\frac{2\nu}{1+\nu} \cosh \xi_n t + \xi_n t \sinh \xi_n t \right) \cosh \xi_n \frac{y}{a} - \xi_n \frac{y}{a} \cosh \xi_n t \sinh \xi_n \frac{y}{a} \right] \cos \xi_n \frac{x}{a} \\ + \frac{P}{2a} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{-B_s}{\Delta_s^{(2)}} \left[\xi_s t' \sinh \xi_s t' \cosh \xi_s \frac{x}{b} - \xi_s \frac{x}{b} \cosh \xi_s t' \sinh \xi_s \frac{x}{b} \right] \cos \xi_s \frac{y}{b}, \\ \sigma_y = \frac{P}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-A_n}{\Delta_n^{(1)}} \left[\left\{ \frac{2}{1+\nu} \cosh \xi_n t + \xi_n t \sinh \xi_n t \right\} \cosh \xi_n \frac{y}{a} - \xi_n \frac{y}{a} \cosh \xi_n t \sinh \xi_n \frac{y}{a} \right] \cos \xi_n \frac{x}{a} \\ + \frac{P}{2a} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{\Delta_s^{(2)}} \left[(\xi_s t' \sinh \xi_s t' - 2 \cosh \xi_s t') \cosh \xi_s \frac{x}{b} - \xi_s \frac{x}{b} \cosh \xi_s t' \sinh \xi_s \frac{x}{b} \right] \cos \xi_s \frac{y}{b}, \\ \tau_{xy} = \frac{P}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\Delta_n^{(1)}} \left[\left\{ \frac{1-\nu}{1+\nu} \cosh \xi_n t + \xi_n t \sinh \xi_n t \right\} \sinh \xi_n \frac{y}{a} - \xi_n \frac{y}{a} \cosh \xi_n t \cosh \xi_n \frac{y}{a} \right] \sin \xi_n \frac{x}{a} \\ + \frac{P}{2a} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{\Delta_s^{(2)}} \left[\{ \xi_s t' \sinh \xi_s t' - \cosh \xi_s t' \} \sinh \xi_s \frac{x}{b} - \xi_s \frac{x}{b} \cosh \xi_s t' \cosh \xi_s \frac{x}{b} \right] \sin \xi_s \frac{y}{b}. \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$2Gu = \frac{P}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(\xi_n/a) \Delta_n^{(1)}} \left[\xi_n t \sinh \xi_n t \cosh \xi_n \frac{y}{a} - \xi_n \frac{y}{a} \cosh \xi_n t \sinh \xi_n \frac{y}{a} \right] \sin \xi_n \frac{x}{a} \\ + \frac{P}{2a} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{-B_s}{(\xi_s/b) \Delta_s^{(2)}} \left[\left\{ \frac{1-\nu}{1+\nu} \cosh \xi_s t' + \xi_s t' \sinh \xi_s t' \right\} \sinh \xi_s \frac{x}{b} - \xi_s \frac{x}{b} \cosh \xi_s t' \cosh \xi_s \frac{x}{b} \right] \cos \xi_s \frac{y}{b}, \\ 2Gv = \frac{P}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-A_n}{(\xi_n/a) \Delta_n^{(1)}} \left[\left\{ \frac{3-\nu}{1+\nu} \cosh \xi_n t + \xi_n t \sinh \xi_n t \right\} \sinh \xi_n \frac{y}{a} - \xi_n \frac{y}{a} \cosh \xi_n t \cosh \xi_n \frac{y}{a} \right] \cos \xi_n \frac{x}{a} \\ + \frac{P}{2a} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{(\xi_s/b) \Delta_s^{(2)}} \left[\left\{ \frac{-2}{1+\nu} \cosh \xi_s t' + \xi_s t' \sinh \xi_s t' \right\} \cosh \xi_s \frac{x}{b} - \xi_s \frac{x}{b} \cosh \xi_s t' \sinh \xi_s \frac{x}{b} \right] \sin \xi_s \frac{y}{b}. \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。

(6) および (7) をみると $x=\pm a$ では $\sigma_x=0$, また $y=\pm b$ では $u=0$ となり, (4) の条件の二つを満足する。更に残りの条件は次式が成立すれば満足される。すなわち

$$\frac{P}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-A_n(-1)^n}{(\xi_n/a) \Delta_n^{(1)}} \left[\left\{ \frac{2}{1+\nu} \cosh \xi_n t + \xi_n t \sinh \xi_n t \right\} \cosh \xi_n \frac{y}{a} - \xi_n \frac{y}{a} \cosh \xi_n t \sinh \xi_n \frac{y}{a} \right] \\ - \frac{P}{2a} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{(\xi_s/b)} \cos \xi_s \frac{y}{b} = -\frac{P}{2}, \\ \frac{P}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\Delta_n^{(1)}} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} \cosh \xi_n t \sinh \xi_n t - \xi_n t \right] \sin \xi_n \frac{x}{a} + \frac{P}{2a} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s(-1)^s}{\Delta_s^{(2)}} \left[\left\{ -\frac{3+\nu}{1+\nu} \cosh \xi_s t' \right. \right. \\ \left. \left. + \xi_s t' \sinh \xi_s t' \right\} \sinh \xi_s \frac{x}{b} - \xi_s \frac{x}{b} \cosh \xi_s t' \cosh \xi_s \frac{x}{b} \right] = 0. \quad \dots\dots\dots (8)$$

しかるに (8) において x あるいは y を含む項は

$$\left(\frac{2}{1+\nu} \cosh \xi_n t + \xi_n t \sinh \xi_n t \right) \cosh \xi_n \frac{y}{a} - \xi_n \frac{y}{a} \cosh \xi_n t \sinh \xi_n \frac{y}{a} \\ = \frac{8 \cosh^2 \xi_n t}{(2n+1)^2 \pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (2s+1)}{t^2 + \left(\frac{2s+1}{2n+1} \right)^2} \left\{ \frac{1}{1+\nu} + \frac{t^2}{t^2 + \left(\frac{2s+1}{2n+1} \right)^2} \right\} \cos \xi_s \frac{y}{b}, \\ \left(-\frac{3+\nu}{1+\nu} \cosh \xi_s t' + \xi_s t' \sinh \xi_s t' \right) \sinh \xi_s \frac{x}{b} - \xi_s \frac{x}{b} \cosh \xi_s t' \cosh \xi_s \frac{x}{b} \\ = \frac{8 t' \cosh^2 \xi_s t'}{(2s+1) \pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t'^2 + \left(\frac{2n+1}{2s+1} \right)^2} \left\{ -\frac{2+\nu}{1+\nu} + \frac{t'^2}{t'^2 + \left(\frac{2n+1}{2s+1} \right)^2} \right\} \sin \xi_n \frac{x}{a}. \quad \dots\dots\dots (9)$$

と書き改めることができるから、これを (8) に代入して

$$\left. \begin{aligned} \frac{2a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_n Q_{sn} \cos \xi_s \frac{y}{b} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{\xi_s/b} \cos \xi_s \frac{y}{b} &= \frac{4a}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \cos \xi_s \frac{y}{b}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{P_n} \sin \xi_n \frac{x}{a} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} B_s R_{ns} \sin \xi_n \frac{x}{a} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(10) が x, y のいかにんに関せず成立するためには

$$\left. \begin{aligned} \frac{t}{2s+1} B_s + \sum_{n=0}^{\infty} A_n Q_{sn} &= \frac{2(-1)^s}{2s+1}, \\ A_n + P_n \sum_{s=0}^{\infty} B_s R_{ns} &= 0, \\ n, s &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

が満足されねばならない。ただし

$$\left. \begin{aligned} Q_{sn} &= \frac{8(-1)^{n+s} \cosh^2 \xi_s t}{(2n+1)^3 \pi A_n^{(1)}} \cdot \frac{2s+1}{t^2 + \left(\frac{2s+1}{2n+1}\right)^2} \left\{ \frac{1}{1+\nu} + \frac{t^2}{t^2 + \left(\frac{2s+1}{2n+1}\right)^2} \right\}, \\ R_{ns} &= \frac{8t'(-1)^{n+s} \cosh^2 \xi_s t'}{(2s+1) \pi A_s^{(2)}} \cdot \frac{1}{t'^2 + \left(\frac{2n+1}{2s+1}\right)^2} \left\{ -\frac{2+\nu}{1+\nu} + \frac{t'^2}{t'^2 + \left(\frac{2n+1}{2s+1}\right)^2} \right\}, \\ P_n &= \frac{A_n^{(1)}}{\frac{3-\nu}{1+\nu} \cosh \xi_n t \sinh \xi_n t - \xi_n t}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

(11) を用いて A_n, B_s を求めれば応力は完全に決定される。次に接触面における y 方向の変位を v_b とすれば (7) より

$$2G v_b = (P/2a) \cdot \lambda'$$

の形を得る。更に $G = E/2(1+\nu)$ の関係を上式に代入すれば弾性率は

$$E = \lambda \cdot \frac{-P/2a}{v_b/b}, \dots\dots\dots (13)$$

$$\lambda = (1+\nu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\xi_n t A_n^{(1)}} \left\{ \frac{3-\nu}{1+\nu} \cosh \xi_n t \sinh \xi_n t - \xi_n t \right\} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s (-1)^s}{\xi_s A_s^{(2)}} \left\{ -\frac{2}{1+\nu} \cosh \xi_s t' + \xi_s t' \sinh \xi_s t' \right\} \right] \dots\dots\dots (13')$$

で与えられる。

しかるに通例 $-\frac{P}{2a} \frac{v_b}{b}$ は弾性率を与えるものと見なされる。則ち見掛けの弾性率を与えるわけであって、これを E' とおくと

$$E = \lambda E' \dots\dots\dots (14)$$

となり真の弾性率は見掛けのものの λ 倍となる。この場合 $a/b (=t') \neq 0$ 則ち試験片の形状が非常に長くなると (11) より

$$B_s = 2t'(-1)^s, A_n = 0$$

を得る。これを (13') に代入すれば

$$\lambda = \frac{8}{\pi^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^2} = 1. \dots\dots\dots (15)$$

また反対に $b/a (=t) \neq 0$ 則ち高さに比して幅がきわめて大になると (13') より

$$\lambda = \frac{1-\nu}{\pi t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2n+1} \dots\dots\dots (15')$$

一方 (12) において $Q_{sn} = \frac{8(-1)^{n+s}}{(1+\nu)t\pi^2(2n+1)^2(2s+1)}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y=y=b} &= -\frac{P}{2a} \left[\frac{16t'(2+\nu)}{(1+\nu)(3-\nu)} \sum_{r=0}^{\infty} B_r (-1)^r (2r+1) \Phi_r(x) + \frac{16t'^3}{\pi(3-\nu)} \sum_{r=0}^{\infty} B_r (-1)^r (2r+1)^3 \Psi_r(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} B_r \beta_{nr} \cos \xi_n \frac{x}{a} + \frac{2}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha_n \cos \xi_n \frac{x}{a} \right]. \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

となるから (11) の第 1 式より

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 t} = \frac{\pi^2(1+\nu)}{4}. \dots\dots\dots (16)$$

(16) を満足する A_n は $A_n = 8t(1+\nu)/\pi(2n+1)$ で与えられる。ゆえにこれを (15') に代入すると

$$\lambda = \frac{8(1-\nu^2)}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1-\nu^2. \dots\dots\dots (17)$$

以上 (14) および (17) より b/a の値に従って $(1-\nu^2) < E/E' < 1$

の関係にあることがわかる。

3. 接触面における応力

試験片と剛性平板との接触面における応力は (6) の形のままであるが収れんが悪くその値を求めることができないので (11) の関係を用いて書き直し計算すればよい。すなわち $\sigma_{y=y=b}$ の場合は

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \xi_n \frac{x}{a} = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} B_r P_n R_{nr} \cos \xi_n \frac{x}{a}$$

を利用し、これを (6) の $\sigma_{y=y=b}$ に代入して

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } \alpha_n &= 1 - \frac{\cosh^2 \xi_n t}{A_n^{(1)}}, \quad \beta_{nr} = P_n R_{nr} - \frac{8t'(1+\nu)(-1)^{n+r}(2r+1)}{\pi(3-\nu)(2n+1^2+t'^2 2r+1^2)} \left\{ -\frac{2+\nu}{1+\nu} + \frac{2r+1^2}{2n+1^2+t'^2 2r+1^2} \right\}, \\ \Phi_r(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1^2+t'^2 2r+1^2} \cos \xi_n \frac{x}{a}, \quad \Psi_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1^2+t'^2 2r+1^2)^2} \cos \xi_n \frac{x}{a}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

同様に $\tau_{xy}|_{y=b}$ は (9) の第 2 式を利用し

$$\tau_{xy}|_{y=b} = \frac{P}{2a} \left[-\frac{1-\nu}{3-\nu} \sum_{r=0}^{\infty} B_r (-1)^r \Omega_r(x) + \sum_{r=0}^{\infty} B_r (-1)^r \chi_r(x) - \frac{1-\nu}{1+\nu} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_r \beta_{nr} \sin \xi_n \frac{x}{a} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \delta_n \sin \xi_n \frac{x}{a} \right]. \dots\dots\dots (20)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \Omega_r(x) &= \frac{1}{\cosh^2 \xi_r t} \left[\left\{ -\frac{3+\nu}{1+\nu} \cosh \xi_r t' + \xi_r t' \sinh \xi_r t' \right\} \sinh \xi_r \frac{x}{b} - \xi_r \frac{x}{b} \cosh \xi_r t' \cosh \xi_r \frac{x}{b} \right], \\ \chi_r(x) &= \frac{1}{A_r^{(2)}} \left[\{ \xi_r t' \sinh \xi_r t' - \cosh \xi_r t' \} \sinh \xi_r \frac{x}{b} - \xi_r \frac{x}{b} \cosh \xi_r t' \cosh \xi_r \frac{x}{b} \right], \\ \delta_n &= -\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{1}{A_n^{(1)}} \left\{ \frac{1-\nu}{1+\nu} \cosh \xi_n t \sinh \xi_n t - \xi_n t \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

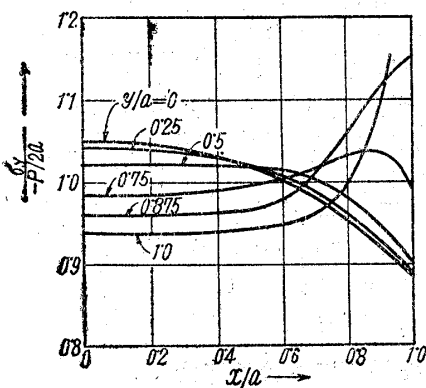
4. 数 値 例

一例として正方形試験片をとれば $a=b$ である。こ

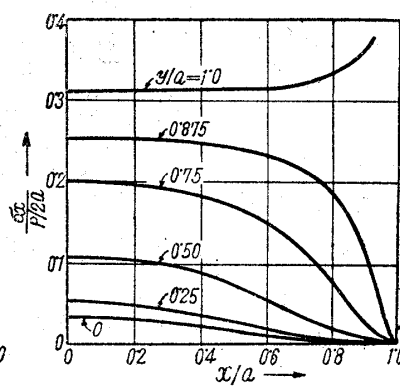
れを (11) に代入し A_n, B_n を定めれば第 1 表が得られる。ただし ν は $1/3$ とし級数は第 13 項までとった。

第 1 表 A_n, B_n の値 ($\nu=1/3$)

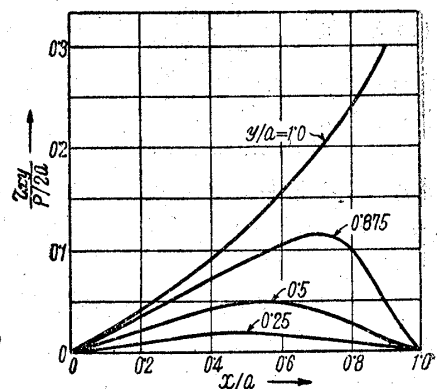
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A_n	0.936	-0.287	0.185	-0.139	0.111	-0.093	0.079	-0.068	0.060	-0.053	0.047	-0.042	0.038
B_n	0.674	-0.223	0.158	-0.130	0.114	-0.105	0.100	-0.096	-0.095	0.093	0.093	-0.093	0.092



第 2 図(a) σ_y の値



第 2 図(b) σ_x の値



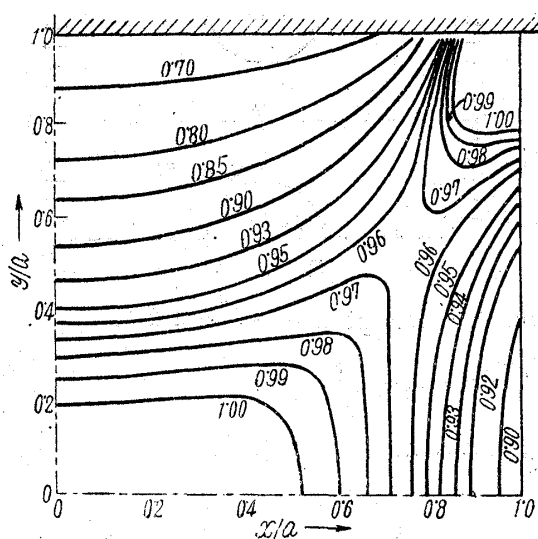
第 2 図(c) τ_{xy} の値

第 1 表を用いて計算した応力の分布図を、第 2 図、(a), (b), (c) に示す。第 3 図は主応力差線図を表わしその単位は $P/2a$ である。以上の諸線図に見られる通り中央部と角部においては応力が最も大となり圧縮につれてこれら諸部が漸次塑性変形あるいは破壊の現象を呈することがわかるが、これは実験事実⁽⁷⁾ともよく合致するように思われる。次に接触面のすべりの条件について考えてみよう。接触面において $|\tau_{xy}|_{y=b}/|\sigma_y|_{y=b}|$ はすべりが起らぬために必要な最小の摩擦係

数 μ を与える。これを図示したものが第 4 図である。各点の摩擦係数がこれより大きければ接触面においてはすべらず常に静止の状態にあるが摩擦係数がこれより小さければその点においてはすべりが生ずる分で試験片とおさえ板とが固着しているという仮定は成立しないことになる。

次に弾性率について考えると (13') の λ は本例においては 0.906 を与えるゆえ (14) より

$$E = 0.906 E'.$$

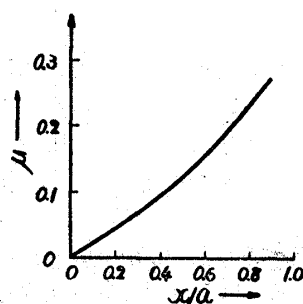
第3図 主応力差線図 (単位 $P/2a$)

すなわち見掛けの弾性率と真の弾性率との差異は約9%になることがわかる。

5. 結 語

以上を要約すると

- (1) 圧縮試験における試験片が接触端の摩擦によりいかなる影響を受けるかを考察した。
- (2) 具体的例として正方形試験片をとり数値計算

第4図 摩擦係数 μ

を行い、その応力分布状況を明らかにした。

(3) その結果接触面において自由にすべると仮定した場合と摩擦によりすべらないと仮定した場合の弾性率の違いは正方形試験片について

では約9%であることがわかる。

最後に当り終始御激励いただいた樋口教授に感謝の意を捧げる。

注：—

- (1) 昭和 27 年 9 月 20 日 仙台地方講演会において講演，原稿受付 昭和 27 年 10 月 24 日。
- (2) 正員，東北大学工学部。
- (3) Filon, L. N. G., Phil. Trans. Roy. Soc. (Ser. A), Vol. 198 (1902).
- (4) Knein, M., Abh. Aerodyn. Inst. Techn. Hochsch. Aachen, Heft 7, S. 44 (1927).
- (5) Greenberg, H. J., Truell, R., Quart. Appl. Math., 6, p. 53 (1948).
- (6) Edelman, F., Quart. Appl. Math., 7, p. 334 (1949).
- (7) Nadai, A., Theory of Flow and Fracture of Solids, p. 328 (1950).

539.412.013.3

両縁に半円切欠を有する帯板の引張り⁽¹⁾

石 田 誠⁽²⁾

On the Tension of the Strip with Semicircular Notches

by Makoto ISIDA

In 1947 C. B. Ling published a research on the strip with semicircular notches under tension, but his numerical values were shown to be unreliable by several investigators. In this paper the same problem is treated by the method of perturbation, and convenient formulas available when the notches are not large, are introduced. The numerical values of the stress-concentration factor are fully examined with other data, theoretical and experimental, and they are shown to be more reliable than Ling's values. An approximate curve of α for large notches is also proposed as a result of the consideration.

1. 緒 言

切欠を有する帯板の二次元弾性問題は理論上実用上の重要さにもかかわらず、解法の困難のために厳密な研究がなく種々の近似計算や推定が行われていたが、最近 C. B. Ling は始めて半円切欠ある帯板の引張問題を逐次近似解法によって厳密に解析した⁽³⁾。ところがその後 R. E. Peterson, M. M. Frocht は Ling の結果が光弾性実験値とかなり異なることを述べ^{(4),(5)}、

また、鶴戸口氏も、多くの資料との比較検討によって Ling の値が疑わしいことを指摘された⁽⁶⁾。そこで筆者は同じ問題を再びとり上げ Ling 氏の理論はそのまま用い数値計算法を改良して、切欠があまり大きくない場合に便利な計算式を与え、Ling より正確と思われる形状係数の数値を示し、多くの資料と共に吟味した。さらに切欠が大きい場合についても合理的な推定を行い、もっとも確からしく思われる形状係数の曲線を与えたものである。