

Supplementary material for
**“A simplified spatial+ approach to mitigate spatial
confounding in multivariate spatial areal models”**
by Arantxa Urdangarin, Tomás Goicoa, Thomas Kneib, María
Dolores Ugarte

A Supplementary material: Simulation study 1

This section includes some additional scenarios to complement the analysis of Simulation study 1. The data is generated following the generating models (11)-(12) with $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)' = (-0.12, -0.03)'$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)' = (-0.15, -0.20)'$, $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*)' = (-0.30, -0.30)'$ and $\mathbf{X}_1$ is the standardized sex ratio covariate. Below we define the correlations between $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ and $\mathbf{X}_3$ chosen in each scenario:

- **Scenario 3:** $cor(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = 0.5$, $cor(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3) = 0.7$ and $cor(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = 0.5$ are chosen. This is similar to Scenario 1 but choosing lower correlation between $\mathbf{X}_2$ and $\mathbf{X}_3$.
- **Scenario 4:** $cor(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = 0.3$, $cor(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3) = 0.7$ and $cor(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = 0.3$ are chosen.
- **Scenario 5:** $cor(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = 0.0$, $cor(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3) = 0.7$ and $cor(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = 0.7$ are chosen.
- **Scenario 6:** $cor(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = 0.0$, $cor(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3) = 0.7$ and $cor(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = 0.3$ are chosen.

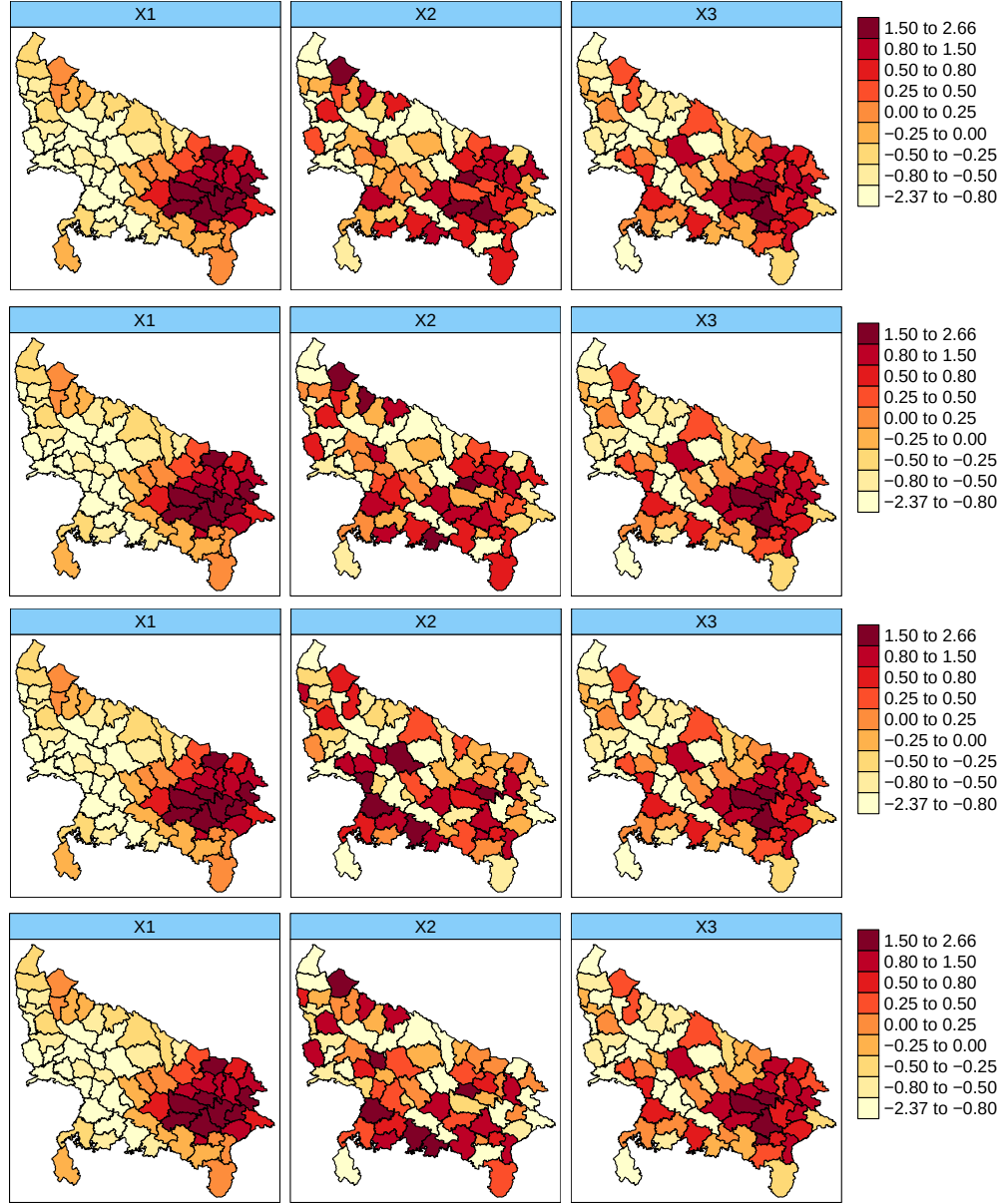


Figure A.1: From left to right, standardized sex ratio covariate in 2011, standardized simulated covariate X_2 and standardized simulated covariate X_3 in Simulation Study 1. The first row corresponds to Scenario 3, the second to Scenario 4, the third to Scenario 5 and the last row to Scenario 6.

Table A.1: Posterior means and standard deviations of β_1 based on 300 simulated datasets for Simulation study 1 and Scenarios 3, 4, 5 and 6.

	Model	True value	ICAR		PCAR		BYM2	
			Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
Scenario 3	M-Spatial	-0.1500	-0.3207	0.0684	-0.3169	0.0457	-0.3130	0.0552
	M-SpatPlus64		-0.1988	0.0456	-0.2002	0.0423	-0.2034	0.0432
	M-SpatPlus59		-0.1915	0.0430	-0.1951	0.0406	-0.1995	0.0417
	M-SpatPlus54		-0.1432	0.0416	-0.1434	0.0403	-0.1439	0.0422
	M-SpatPlus49		-0.1288	0.0407	-0.1297	0.0399	-0.1301	0.0421
Scenario 4	M-Spatial	-0.1500	-0.2721	0.0734	-0.2604	0.0476	-0.2596	0.0583
	M-SpatPlus64		-0.1700	0.0482	-0.1715	0.0438	-0.1742	0.0446
	M-SpatPlus59		-0.1653	0.0454	-0.1694	0.0418	-0.1740	0.0432
	M-SpatPlus54		-0.1225	0.0430	-0.1223	0.0407	-0.1222	0.0429
	M-SpatPlus49		-0.1117	0.0418	-0.1126	0.0401	-0.1125	0.0427
Scenario 5	M-Spatial	-0.1500	-0.1067	0.0773	-0.1598	0.0487	-0.1361	0.0567
	M-SpatPlus64		-0.0657	0.0489	-0.0711	0.0488	-0.0772	0.0463
	M-SpatPlus59		-0.0681	0.0461	-0.0742	0.0464	-0.0853	0.0448
	M-SpatPlus54		-0.0386	0.0421	-0.0408	0.0423	-0.0447	0.0433
	M-SpatPlus49		-0.0255	0.0407	-0.0265	0.0408	-0.0280	0.0428
Scenario 6	M-Spatial	-0.1500	-0.1630	0.0737	-0.1711	0.0482	-0.1614	0.0580
	M-SpatPlus64		-0.1046	0.0476	-0.1091	0.0445	-0.1130	0.0453
	M-SpatPlus59		-0.1078	0.0447	-0.1165	0.0422	-0.1232	0.0437
	M-SpatPlus54		-0.0697	0.0417	-0.0711	0.0401	-0.0725	0.0426
	M-SpatPlus49		-0.0609	0.0404	-0.0624	0.0390	-0.0630	0.0421

Table A.2: Posterior means and standard deviations of β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 1 and Scenarios 3, 4, 5 and 6.

	Model	True value	ICAR		PCAR		BYM2	
			Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
Scenario 3	M-Spatial	-0.2000	-0.3863	0.0593	-0.4138	0.0401	-0.4029	0.0454
	M-SpatPlus64		-0.2299	0.0424	-0.2290	0.0442	-0.2309	0.0435
	M-SpatPlus59		-0.2137	0.0403	-0.2112	0.0421	-0.2162	0.0420
	M-SpatPlus54		-0.1693	0.0392	-0.1687	0.0417	-0.1706	0.0422
	M-SpatPlus49		-0.1446	0.0389	-0.1433	0.0414	-0.1442	0.0424
Scenario 4	M-Spatial	-0.2000	-0.3819	0.0597	-0.4113	0.0403	-0.4001	0.0453
	M-SpatPlus64		-0.2272	0.0426	-0.2267	0.0452	-0.2287	0.0440
	M-SpatPlus59		-0.2121	0.0405	-0.2101	0.0430	-0.2155	0.0425
	M-SpatPlus54		-0.1669	0.0394	-0.1664	0.0423	-0.1685	0.0432
	M-SpatPlus49		-0.1419	0.0391	-0.1405	0.0420	-0.1415	0.0434
Scenario 5	M-Spatial	-0.2000	-0.3730	0.0607	-0.4119	0.0402	-0.3939	0.0455
	M-SpatPlus64		-0.2206	0.0454	-0.2240	0.0477	-0.2282	0.0440
	M-SpatPlus59		-0.2033	0.0430	-0.2066	0.0456	-0.2156	0.0426
	M-SpatPlus54		-0.1614	0.0415	-0.1618	0.0443	-0.1660	0.0437
	M-SpatPlus49		-0.1360	0.0411	-0.1353	0.0439	-0.1372	0.0443
Scenario 6	M-Spatial	-0.2000	-0.3818	0.0590	-0.4128	0.0401	-0.4005	0.0453
	M-SpatPlus64		-0.2253	0.0428	-0.2259	0.0461	-0.2285	0.0437
	M-SpatPlus59		-0.2089	0.0407	-0.2082	0.0438	-0.2150	0.0423
	M-SpatPlus54		-0.1655	0.0396	-0.1650	0.0432	-0.1677	0.0433
	M-SpatPlus49		-0.1394	0.0393	-0.1382	0.0430	-0.1394	0.0438

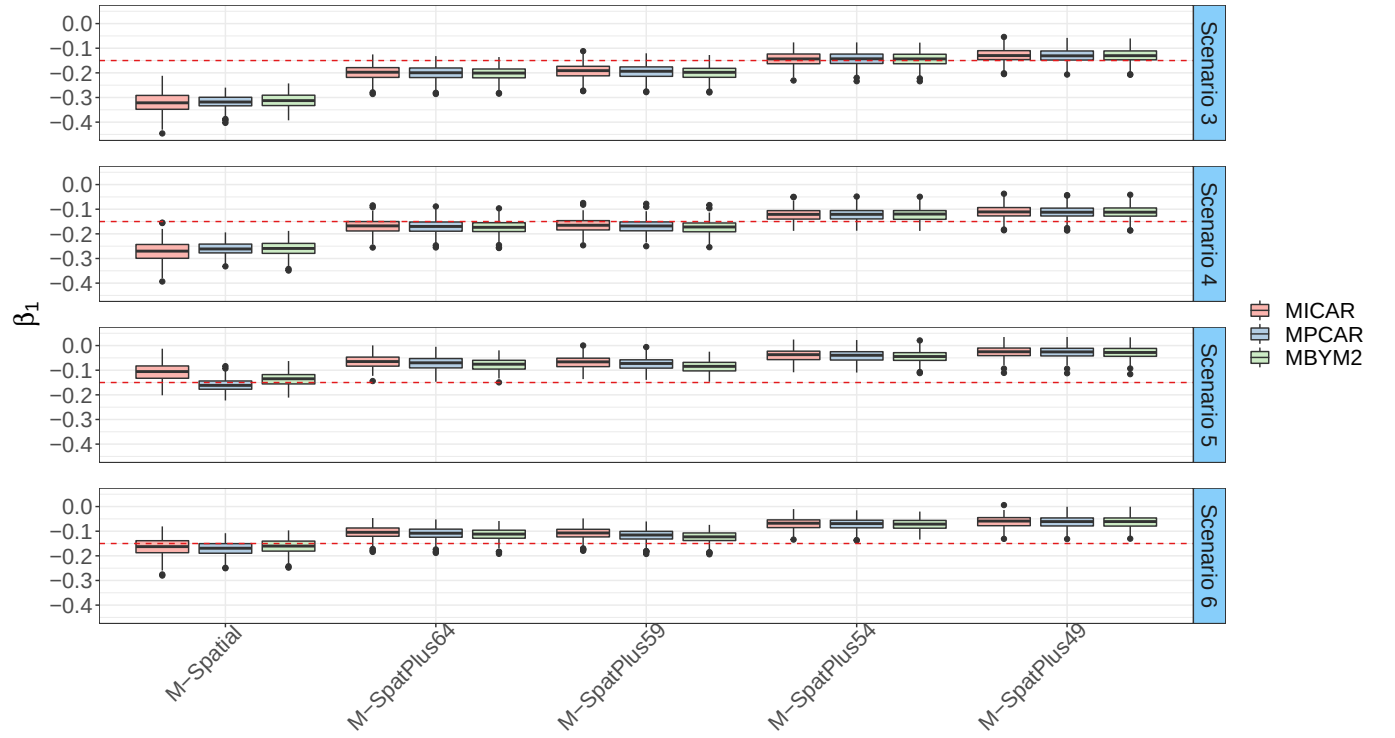


Figure A.2: Boxplots of the estimated means of β_1 based on 300 simulated datasets for Simulation Study 1, Scenarios 3, 4, 5 and 6 (ordered from top to bottom). Each color represents a different prior given to the columns of Φ , namely, red for ICAR, blue for PCAR and green for BYM2.

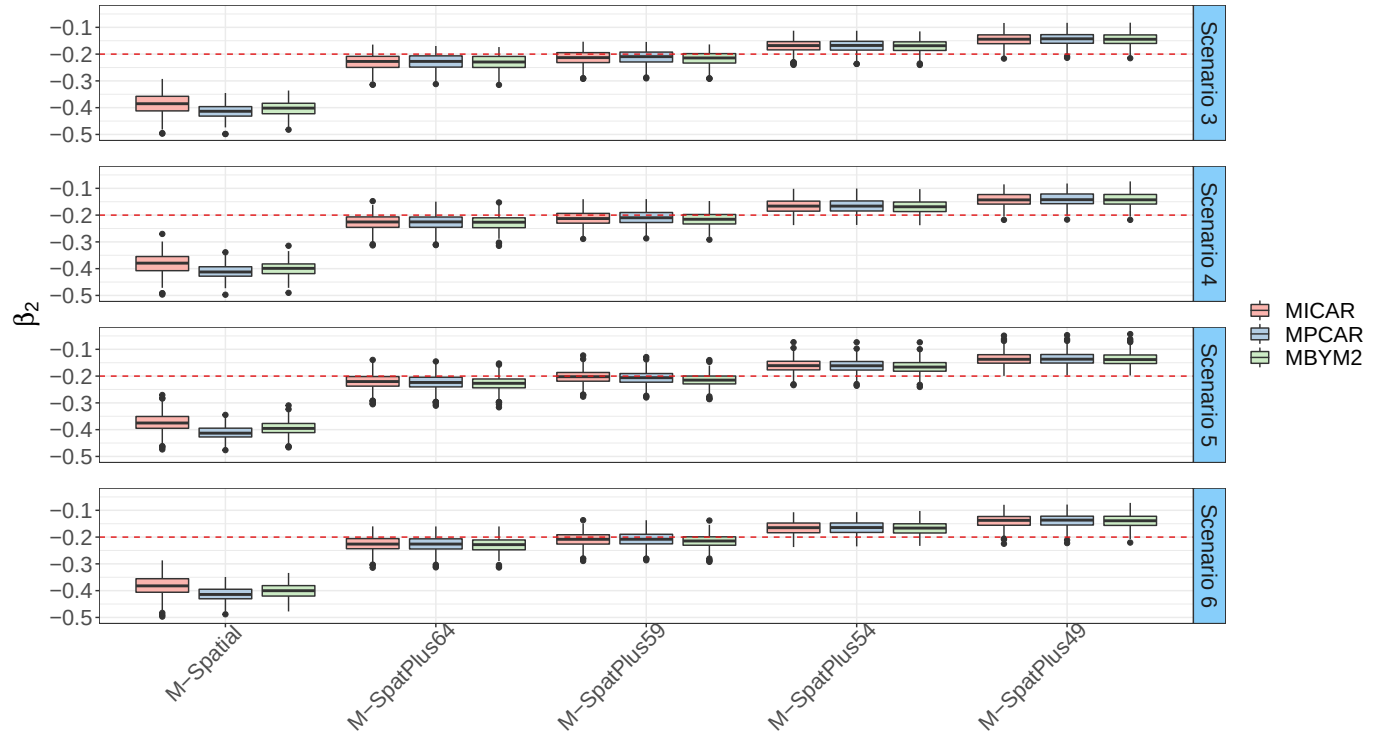


Figure A.3: Boxplots of the estimated means of β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation Study 1, Scenarios 3, 4, 5 and 6 (ordered from top to bottom). Each color represents a different prior given to the columns of Φ , namely, red for ICAR, blue for PCAR and green for BYM2.

Table A.3: Estimated standard errors ($s.e.est$) and simulated standard errors ($s.e.sim$) for β_1 based on 300 simulated datasets for Simulation study 1 and Scenarios 1 to 6.

		ICAR		PCAR		BYM2	
	Model	$s.e.est$	$s.e.sim$	$s.e.est$	$s.e.sim$	$s.e.est$	$s.e.sim$
Scenario 1	M-Spatial	0.0674	0.0390	0.0457	0.0263	0.0534	0.0289
	M-SpatPlus64	0.0446	0.0279	0.0429	0.0272	0.0433	0.0267
	M-SpatPlus59	0.0419	0.0267	0.0407	0.0261	0.0415	0.0255
	M-SpatPlus54	0.0407	0.0264	0.0402	0.0262	0.0420	0.0259
	M-SpatPlus49	0.0399	0.0264	0.0398	0.0262	0.0419	0.0262
Scenario 2	M-Spatial	0.0733	0.0401	0.0477	0.0265	0.0579	0.0307
	M-SpatPlus64	0.0481	0.0275	0.0449	0.0270	0.0452	0.0268
	M-SpatPlus59	0.0453	0.0263	0.0431	0.0262	0.0440	0.0257
	M-SpatPlus54	0.0431	0.0251	0.0422	0.0252	0.0443	0.0251
	M-SpatPlus49	0.0419	0.0246	0.0416	0.0246	0.0442	0.0245
Scenario 3	M-Spatial	0.0684	0.0419	0.0457	0.0272	0.0552	0.0312
	M-SpatPlus64	0.0456	0.0293	0.0423	0.0287	0.0432	0.0282
	M-SpatPlus59	0.0430	0.0280	0.0406	0.0277	0.0417	0.0270
	M-SpatPlus54	0.0416	0.0278	0.0403	0.0278	0.0422	0.0277
	M-SpatPlus49	0.0407	0.0273	0.0399	0.0273	0.0421	0.0273
Scenario 4	M-Spatial	0.0734	0.0421	0.0476	0.0259	0.0583	0.0306
	M-SpatPlus64	0.0482	0.0292	0.0438	0.0284	0.0446	0.0280
	M-Spatplus59	0.0454	0.0285	0.0418	0.0281	0.0432	0.0279
	M-SpatPlus54	0.0430	0.0270	0.0407	0.0268	0.0429	0.0271
	M-SpatPlus49	0.0418	0.0260	0.0401	0.0257	0.0427	0.0261
Scenario 5	M-Spatial	0.0773	0.0346	0.0487	0.0252	0.0567	0.0270
	M-SpatPlus64	0.0489	0.0247	0.0488	0.0244	0.0463	0.0237
	M-SpatPlus59	0.0461	0.0239	0.0464	0.0237	0.0448	0.0230
	M-SpatPlus54	0.0421	0.0229	0.0423	0.0228	0.0433	0.0227
	M-SpatPlus49	0.0407	0.0237	0.0408	0.0237	0.0428	0.0237
Scenario 6	M-Spatial	0.0737	0.0375	0.0482	0.0267	0.0580	0.0287
	M-SpatPlus64	0.0476	0.0258	0.0445	0.0251	0.0453	0.0247
	M-SpatPlus59	0.0447	0.0248	0.0422	0.0245	0.0437	0.0240
	M-SpatPlus54	0.0417	0.0231	0.0401	0.0228	0.0426	0.0226
	M-SpatPlus49	0.0404	0.0236	0.0390	0.0234	0.0421	0.0234

Table A.4: Estimated standard errors ($s.e._{est}$) and simulated standard errors ($s.e._{sim}$) for β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 1 and Scenarios 1 to 6.

	Model	ICAR		PCAR		BYM2	
		$s.e._{est}$	$s.e._{sim}$	$s.e._{est}$	$s.e._{sim}$	$s.e._{est}$	$s.e._{sim}$
Scenario 1	M-Spatial	0.0596	0.0357	0.0407	0.0243	0.0462	0.0262
	M-SpatPlus64	0.0429	0.0268	0.0454	0.0267	0.0438	0.0259
	M-SpatPlus59	0.0408	0.0257	0.0432	0.0256	0.0423	0.0248
	M-SpatPlus54	0.0396	0.0252	0.0421	0.0252	0.0424	0.0251
	M-SpatPlus49	0.0393	0.0242	0.0417	0.0243	0.0426	0.0242
Scenario 2	M-Spatial	0.0690	0.0382	0.0443	0.0252	0.0508	0.0273
	M-SpatPlus64	0.0465	0.0263	0.0477	0.0256	0.0459	0.0244
	M-SpatPlus59	0.0438	0.0252	0.0452	0.0245	0.0443	0.0237
	M-SpatPlus54	0.0418	0.0242	0.0439	0.0240	0.0445	0.0236
	M-SpatPlus49	0.0411	0.0239	0.0434	0.0239	0.0447	0.0237
Scenario 3	M-Spatial	0.0593	0.0385	0.0401	0.0265	0.0454	0.0284
	M-SpatPlus64	0.0424	0.0279	0.0442	0.0277	0.0435	0.0271
	M-SpatPlus59	0.0403	0.0258	0.0421	0.0256	0.0420	0.0248
	M-SpatPlus54	0.0392	0.0248	0.0417	0.0246	0.0422	0.0243
	M-SpatPlus49	0.0389	0.0243	0.0414	0.0243	0.0424	0.0242
Scenario 4	M-Spatial	0.0597	0.0391	0.0403	0.0266	0.0453	0.0286
	M-SpatPlus64	0.0426	0.0280	0.0452	0.0282	0.0440	0.0270
	M-SpatPlus59	0.0405	0.0262	0.0430	0.0261	0.0425	0.0250
	M-SpatPlus54	0.0394	0.0258	0.0423	0.0259	0.0432	0.0254
	M-SpatPlus49	0.0391	0.0247	0.0420	0.0249	0.0434	0.0246
Scenario 5	M-Spatial	0.0607	0.0354	0.0402	0.0262	0.0455	0.0287
	M-SpatPlus64	0.0454	0.0281	0.0477	0.0278	0.0440	0.0268
	M-SpatPlus59	0.0430	0.0262	0.0456	0.0260	0.0426	0.0250
	M-SpatPlus54	0.0415	0.0256	0.0443	0.0255	0.0437	0.0252
	M-SpatPlus49	0.0411	0.0248	0.0439	0.0248	0.0443	0.0247
Scenario 6	M-Spatial	0.0590	0.0383	0.0401	0.0264	0.0453	0.0285
	M-SpatPlus64	0.0428	0.0276	0.0461	0.0277	0.0437	0.0266
	M-SpatPlus59	0.0407	0.0261	0.0438	0.0263	0.0423	0.0251
	M-SpatPlus54	0.0396	0.0253	0.0432	0.0252	0.0433	0.0249
	M-SpatPlus49	0.0393	0.0250	0.0430	0.0249	0.0438	0.0249

Table A.5: Empirical 95% coverage probabilities of the true value of β_1 and β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 1 and Scenarios 3, 4, 5 and 6.

		β_1			β_2		
	Model	ICAR	PCAR	BYM2	ICAR	PCAR	BYM2
Scenario 3	M-Spatial	19.3333	0.0000	6.0000	5.0000	0.0000	0.0000
	M-SpatPlus64	90.6667	87.3333	87.0000	96.0000	98.0000	97.3333
	M-SpatPlus59	94.6667	90.0000	89.3333	98.6667	99.3333	99.0000
	M-SpatPlus54	99.6667	99.6667	100.0000	96.6667	97.3333	99.0000
	M-SpatPlus49	98.3333	98.6667	99.0000	78.0000	82.3333	86.0000
Scenario 4	M-Spatial	70.6667	26.3333	56.0000	6.0000	0.0000	0.0000
	M-SpatPlus64	99.6667	98.3333	98.3333	96.6667	97.6667	97.3333
	M-SpatPlus59	99.6667	98.6667	98.3333	99.6667	99.6667	99.6667
	M-SpatPlus54	98.0000	96.6667	97.6667	94.0000	95.3333	97.6667
	M-SpatPlus49	95.3333	95.6667	97.0000	75.0000	79.6667	84.6667
Scenario 5	M-Spatial	100.0000	100.0000	100.0000	9.0000	0.0000	0.0000
	M-SpatPlus64	64.3333	72.6667	73.6667	98.0000	98.3333	97.3333
	M-SpatPlus59	61.0000	72.6667	81.6667	100.0000	100.0000	99.3333
	M-SpatPlus54	12.0000	13.6667	20.3333	94.3333	96.6667	98.0000
	M-SpatPlus49	2.0000	3.0000	6.0000	76.6667	79.6667	83.0000
Scenario 6	M-Spatial	100.0000	99.3333	100.0000	6.3333	0.0000	0.0000
	M-SpatPlus64	96.0000	95.6667	98.0000	97.6667	97.6667	98.3333
	M-SpatPlus59	96.3333	96.6667	100.0000	99.0000	100.0000	98.6667
	M-SpatPlus54	49.6667	49.3333	60.0000	94.6667	97.0000	98.0000
	M-SpatPlus49	34.0000	31.6667	42.0000	75.3333	82.3333	85.6667

Table A.6: Posterior medians and 95% credible intervals of estimated correlations between crime 1 and crime 2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 1 and Scenarios 3, 4, 5 and 6.

		ICAR			PCAR			BYM2		
	Model	Median	95% CI		Median	95% CI		Median	95% CI	
Scenario 3	M-Spatial	0.2568	-0.2346	0.6783	0.2359	-0.1913	0.6168	0.3250	-0.2218	0.7265
	M-SpatPlus64	0.3574	-0.0573	0.7085	0.2969	0.0897	0.5364	0.7132	0.4062	0.8911
	M-SpatPlus59	0.3508	-0.0646	0.7041	0.2907	0.0839	0.5267	0.7183	0.4157	0.8902
	M-SpatPlus54	0.4754	0.1048	0.7708	0.4119	0.1556	0.6710	0.8001	0.5474	0.9283
	M-SpatPlus49	0.5076	0.1522	0.7859	0.4444	0.1718	0.7044	0.8170	0.5824	0.9340
Scenario 4	M-Spatial	0.0977	-0.3660	0.5370	0.1147	-0.3026	0.5084	0.2039	-0.3156	0.6323
	M-SpatPlus64	0.1841	-0.2184	0.5602	0.1142	-0.0361	0.2907	0.5070	0.1514	0.7525
	M-SpatPlus59	0.1716	-0.2322	0.5512	0.1096	-0.0375	0.2842	0.5073	0.1549	0.7534
	M-SpatPlus54	0.3030	-0.0723	0.6349	0.2212	0.0377	0.4361	0.6889	0.3719	0.8736
	M-SpatPlus49	0.3341	-0.0300	0.6511	0.2651	0.0557	0.5018	0.7168	0.4094	0.8884
Scenario 5	M-Spatial	0.9673	0.8510	0.9956	0.9459	0.7517	0.9947	0.9169	0.6412	0.9838
	M-SpatPlus64	0.8722	0.6981	0.9579	0.8538	0.6599	0.9515	0.7170	0.3678	0.9076
	M-SpatPlus59	0.8590	0.6711	0.9531	0.8370	0.6308	0.9461	0.6915	0.3197	0.8990
	M-SpatPlus54	0.8760	0.7030	0.9608	0.8519	0.6545	0.9527	0.7632	0.4212	0.9302
	M-SpatPlus49	0.8789	0.7100	0.9622	0.8511	0.6530	0.9534	0.7805	0.4544	0.9355
Scenario 6	M-Spatial	0.5144	0.0786	0.8245	0.4409	0.0438	0.7526	0.4642	0.0033	0.7998
	M-SpatPlus64	0.4467	0.0635	0.7441	0.3093	0.0435	0.5584	0.4428	0.0502	0.7570
	M-SpatPlus59	0.4150	0.0252	0.7239	0.2605	0.0115	0.5027	0.4133	0.0361	0.7198
	M-SpatPlus54	0.5037	0.1515	0.7727	0.3616	0.0993	0.6140	0.5861	0.1926	0.8397
	M-SpatPlus49	0.5133	0.1715	0.7757	0.3696	0.1047	0.6226	0.6180	0.2255	0.8573

Table A.7: DIC and WAIC based on 300 simulated data sets for Simulation Study 1 and Scenarios 3, 4, 5 and 6.

	Model	ICAR		PCAR		BYM2	
		DIC	WAIC	DIC	WAIC	DIC	WAIC
Scenario 3	M-Spatial	953.3899	959.0199	944.7410	940.6010	940.0554	933.2278
	M-SpatPlus64	951.5502	952.1564	945.9650	940.6912	942.7260	932.5063
	M-SpatPlus59	951.5871	952.2058	945.7270	940.4662	942.6509	932.4621
	M-SpatPlus54	953.3013	951.8469	947.7106	939.4825	946.1554	935.1135
	M-SpatPlus49	954.0929	952.0263	948.5981	939.6678	947.0794	935.5887
Scenario 4	M-Spatial	956.4190	959.9196	948.3138	942.5435	943.8799	935.4106
	M-SpatPlus64	954.4169	952.4786	950.0634	943.0617	946.4975	933.8437
	M-SpatPlus59	954.4825	952.6663	949.9523	943.3573	946.3982	933.9363
	M-SpatPlus54	956.0888	951.8025	951.5685	941.7616	949.9328	936.6268
	M-SpatPlus49	956.8527	951.8008	952.1582	941.4476	950.8215	937.1556
Scenario 5	M-Spatial	920.6782	918.4245	917.5135	913.1496	914.1673	909.6811
	SpatPlus64	928.7485	920.9094	931.7151	921.7071	926.4891	913.7202
	SpatPlus59	930.9754	923.6303	933.8990	924.3162	928.5294	916.3151
	SpatPlus54	932.7776	925.6282	936.0239	927.1580	931.8094	920.4459
	SpatPlus49	934.4598	927.5054	937.6879	928.9506	933.6649	922.6290
Scenario 6	Spatial	955.1080	960.3773	946.8813	942.3910	942.3171	935.2643
	M-SpatPlus64	953.1437	952.1915	951.3409	943.9880	946.4406	934.3222
	M-SpatPlus59	953.6909	952.7222	951.3973	944.3156	946.6463	934.6044
	M-SpatPlus54	954.6095	952.1191	952.7415	943.5699	949.8364	937.4908
	M-SpatPlus49	955.5693	952.3564	953.3667	943.5717	951.0021	938.2834

Table A.8: Average value of mean absolute relative bias (MARB) and mean relative root mean prediction error (MRRMSE) of the relative risks based on 300 simulated datasets for Simulation study 1 and Scenarios 1 to 6.

	Model	ICAR		PCAR		BYM2	
		MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE
Scenario 1	M-Spatial	0.0916	0.1550	0.0823	0.1507	0.0805	0.1480
	M-SpatPlus64	0.0865	0.1553	0.0804	0.1539	0.0754	0.1513
	M-SpatPlus59	0.0862	0.1554	0.0794	0.1535	0.0740	0.1509
	M-SpatPlus54	0.0834	0.1574	0.0766	0.1557	0.0736	0.1544
	M-SpatPlus49	0.0828	0.1585	0.0761	0.1566	0.0722	0.1554
Scenario 2	M-Spatial	0.0927	0.1717	0.0847	0.1673	0.0831	0.1640
	M-SpatPlus64	0.0895	0.1712	0.0828	0.1680	0.0783	0.1647
	M-SpatPlus59	0.0887	0.1709	0.0820	0.1674	0.0766	0.1638
	M-SpatPlus54	0.0858	0.1723	0.0793	0.1691	0.0756	0.1668
	M-SpatPlus49	0.0841	0.1726	0.0768	0.1692	0.0738	0.1671
Scenario 3	M-Spatial	0.0953	0.1621	0.0865	0.1570	0.0845	0.1539
	M-SpatPlus64	0.0890	0.1620	0.0830	0.1594	0.0783	0.1569
	M-SpatPlus59	0.0878	0.1618	0.0817	0.1588	0.0760	0.1562
	M-SpatPlus54	0.0856	0.1647	0.0788	0.1618	0.0758	0.1604
	M-SpatPlus49	0.0846	0.1658	0.0775	0.1626	0.0742	0.1614
Scenario 4	M-Spatial	0.0946	0.1665	0.0861	0.1614	0.0842	0.1583
	M-SpatPlus64	0.0883	0.1663	0.0834	0.1654	0.0782	0.1621
	M-SpatPlus59	0.0876	0.1663	0.0827	0.1649	0.0761	0.1614
	M-SpatPlus54	0.0857	0.1691	0.0800	0.1671	0.0766	0.1653
	M-SpatPlus49	0.0843	0.1701	0.0784	0.1677	0.0751	0.1660
Scenario 5	M-Spatial	0.0594	0.1356	0.0568	0.1340	0.0563	0.1311
	M-SpatPlus64	0.0622	0.1442	0.0626	0.1482	0.0591	0.1434
	M-SpatPlus59	0.0639	0.1466	0.0641	0.1505	0.0605	0.1458
	M-SpatPlus54	0.0661	0.1490	0.0680	0.1529	0.0647	0.1495
	M-SpatPlus49	0.0673	0.1507	0.0684	0.1545	0.0652	0.1513
Scenario 6	M-Spatial	0.0955	0.1648	0.0863	0.1601	0.0843	0.1570
	M-SpatPlus64	0.0883	0.1648	0.0827	0.1665	0.0783	0.1621
	M-SpatPlus59	0.0881	0.1654	0.0823	0.1666	0.0768	0.1623
	M-SpatPlus54	0.0866	0.1672	0.0805	0.1681	0.0778	0.1655
	M-SpatPlus49	0.0859	0.1684	0.0798	0.1687	0.0768	0.1664

Table A.9: Length of the 95% credible intervals of β_1 and β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 1 and Scenarios 1 to 6.

		β_1			β_2		
	Model	ICAR	PCAR	BYM2	ICAR	PCAR	BYM2
Scenario 1	M-Spatial	0.2654	0.1801	0.2104	0.2347	0.1604	0.1820
	M-SpatPlus64	0.1755	0.1687	0.1703	0.1689	0.1786	0.1722
	M-SpatPlus59	0.1647	0.1600	0.1631	0.1604	0.1699	0.1663
	M-SpatPlus54	0.1601	0.1581	0.1652	0.1557	0.1655	0.1668
	M-SpatPlus49	0.1569	0.1563	0.1648	0.1545	0.1640	0.1676
Scenario 2	M-Spatial	0.2887	0.1879	0.2283	0.2719	0.1747	0.2002
	M-SpatPlus64	0.1895	0.1762	0.1778	0.1830	0.1872	0.1804
	M-SpatPlus59	0.1784	0.1693	0.1728	0.1725	0.1775	0.1742
	M-SpatPlus54	0.1696	0.1656	0.1742	0.1643	0.1724	0.1750
	M-SpatPlus49	0.1649	0.1634	0.1737	0.1618	0.1703	0.1758
Scenario 3	M-Spatial	0.2695	0.1801	0.2176	0.2338	0.1581	0.1790
	M-SpatPlus64	0.1797	0.1663	0.1696	0.1667	0.1736	0.1710
	M-SpatPlus59	0.1693	0.1595	0.1638	0.1585	0.1654	0.1651
	M-SpatPlus54	0.1636	0.1582	0.1658	0.1543	0.1636	0.1660
	M-SpatPlus49	0.1599	0.1568	0.1654	0.1531	0.1625	0.1666
Scenario 4	M-Spatial	0.2893	0.1877	0.2298	0.2353	0.1587	0.1784
	M-SpatPlus64	0.1896	0.1718	0.1755	0.1677	0.1776	0.1731
	M-SpatPlus59	0.1786	0.1643	0.1699	0.1592	0.1689	0.1670
	M-SpatPlus54	0.1692	0.1597	0.1687	0.1550	0.1662	0.1698
	M-SpatPlus49	0.1644	0.1574	0.1677	0.1539	0.1650	0.1705
Scenario 5	M-Spatial	0.3047	0.1918	0.2233	0.2391	0.1581	0.1793
	M-SpatPlus64	0.1928	0.1921	0.1822	0.1787	0.1876	0.1730
	M-SpatPlus59	0.1817	0.1826	0.1763	0.1690	0.1794	0.1674
	M-SpatPlus54	0.1659	0.1666	0.1705	0.1632	0.1741	0.1717
	M-SpatPlus49	0.1602	0.1605	0.1683	0.1615	0.1726	0.1743
Scenario 6	M-Spatial	0.2903	0.1901	0.2287	0.2326	0.1580	0.1784
	M-SpatPlus64	0.1876	0.1751	0.1784	0.1683	0.1812	0.1718
	M-SpatPlus59	0.1761	0.1661	0.1719	0.1600	0.1722	0.1661
	M-SpatPlus54	0.1641	0.1577	0.1676	0.1556	0.1699	0.1701
	M-SpatPlus49	0.1590	0.1533	0.1656	0.1547	0.1688	0.1723

Table A.10: Average value of mean absolute relative bias (MARB) and mean relative root mean prediction error (MRRMSE) of β_1 based on 300 simulated datasets for Simulation study 1 and Scenarios 1 to 6.

	Model	ICAR		PCAR		BYM2	
		MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE
Scenario 1	M-Spatial	0.9972	1.0305	1.1079	1.1217	1.0322	1.0500
	M-SpatPlus64	0.2459	0.3084	0.2630	0.3196	0.2946	0.3444
	M-SpatPlus59	0.2121	0.2769	0.2421	0.2983	0.2878	0.3343
	M-SpatPlus54	0.1311	0.2195	0.1232	0.2137	0.1120	0.2057
	M-SpatPlus49	0.2394	0.2971	0.2322	0.2907	0.2255	0.2854
Scenario 2	M-Spatial	0.8046	0.8479	0.7463	0.7670	0.7264	0.7547
	M-SpatPlus64	0.1279	0.2237	0.1402	0.2284	0.1638	0.2426
	M-SpatPlus59	0.0988	0.2013	0.1298	0.2174	0.1652	0.2381
	M-SpatPlus54	0.1942	0.2564	0.1948	0.2574	0.1924	0.2550
	M-SpatPlus49	0.2693	0.3153	0.2603	0.3077	0.2607	0.3077
Scenario 3	M-Spatial	1.1380	1.1718	1.1130	1.1276	1.0868	1.1066
	M-SpatPlus64	0.3254	0.3795	0.3344	0.3852	0.3561	0.4027
	M-SpatPlus59	0.2765	0.3337	0.3006	0.3526	0.3303	0.3763
	M-SpatPlus54	0.0455	0.1906	0.0439	0.1903	0.0406	0.1894
	M-SpatPlus49	0.1411	0.2302	0.1355	0.2268	0.1329	0.2252
Scenario 4	M-Spatial	0.8138	0.8610	0.7360	0.7561	0.7309	0.7589
	M-SpatPlus64	0.1330	0.2357	0.1432	0.2374	0.1616	0.2469
	M-SpatPlus59	0.1021	0.2159	0.1293	0.2275	0.1602	0.2455
	M-SpatPlus54	0.1837	0.2571	0.1846	0.2568	0.1850	0.2586
	M-SpatPlus49	0.2552	0.3084	0.2492	0.3023	0.2498	0.3043
Scenario 5	M-Spatial	0.2884	0.3693	0.0656	0.1806	0.0929	0.2028
	M-SpatPlus64	0.5622	0.5858	0.5259	0.5504	0.4851	0.5103
	M-SpatPlus59	0.5462	0.5690	0.5051	0.5292	0.4310	0.4574
	M-SpatPlus54	0.7427	0.7582	0.7278	0.7435	0.7018	0.7179
	M-SpatPlus49	0.8300	0.8448	0.8237	0.8387	0.8132	0.8283
Scenario 6	M-Spatial	0.0866	0.2643	0.1404	0.2267	0.0758	0.2059
	M-SpatPlus64	0.3027	0.3480	0.2727	0.3198	0.2468	0.2968
	M-SpatPlus59	0.2811	0.3263	0.2234	0.2765	0.1785	0.2396
	M-SpatPlus54	0.5350	0.5568	0.5260	0.5476	0.5165	0.5380
	M-SpatPlus49	0.5939	0.6144	0.5837	0.6042	0.5798	0.6005

Table A.11: Average value of mean absolute relative bias (MARB) and mean relative root mean prediction error (MRRMSE) of β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 1 and Scenarios 1 to 6.

	Model	ICAR		PCAR		BYM2	
		MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE
Scenario 1	M-Spatial	0.9140	0.9312	1.0698	1.0767	0.9982	1.0067
	M-SpatPlus64	0.1292	0.1862	0.1266	0.1839	0.1411	0.1917
	M-SpatPlus59	0.0471	0.1369	0.0373	0.1331	0.0717	0.1431
	M-SpatPlus54	0.1685	0.2105	0.1725	0.2137	0.1615	0.2046
	M-SpatPlus49	0.2939	0.3178	0.2999	0.3236	0.2950	0.3189
Scenario 2	M-Spatial	0.5761	0.6070	0.7782	0.7883	0.7016	0.7147
	M-SpatPlus64	0.0597	0.1444	0.0577	0.1402	0.0392	0.1284
	M-SpatPlus59	0.1103	0.1676	0.1182	0.1703	0.0716	0.1383
	M-SpatPlus54	0.3160	0.3383	0.3153	0.3373	0.2983	0.3208
	M-SpatPlus49	0.4349	0.4510	0.4422	0.4581	0.4338	0.4497
Scenario 3	M-Spatial	0.9313	0.9511	1.0688	1.0770	1.0145	1.0244
	M-SpatPlus64	0.1494	0.2043	0.1448	0.2005	0.1544	0.2053
	M-SpatPlus59	0.0686	0.1463	0.0560	0.1397	0.0810	0.1481
	M-SpatPlus54	0.1535	0.1972	0.1566	0.1993	0.1472	0.1909
	M-SpatPlus49	0.2768	0.3023	0.2833	0.3083	0.2791	0.3041
Scenario 4	M-Spatial	0.9095	0.9303	1.0565	1.0648	1.0006	1.0107
	M-SpatPlus64	0.1360	0.1952	0.1334	0.1940	0.1433	0.1967
	M-SpatPlus59	0.0607	0.1442	0.0504	0.1401	0.0775	0.1469
	M-SpatPlus54	0.1656	0.2098	0.1681	0.2123	0.1574	0.2023
	M-SpatPlus49	0.2905	0.3157	0.2974	0.3225	0.2925	0.3174
Scenario 5	M-Spatial	0.8648	0.8827	1.0593	1.0674	0.9694	0.9799
	M-SpatPlus64	0.1029	0.1740	0.1202	0.1839	0.1410	0.1946
	M-SpatPlus59	0.0164	0.1322	0.0332	0.1343	0.0781	0.1472
	M-SpatPlus54	0.1932	0.2316	0.1908	0.2294	0.1702	0.2117
	M-SpatPlus49	0.3198	0.3430	0.3233	0.3462	0.3139	0.3374
Scenario 6	M-Spatial	0.9092	0.9292	1.0641	1.0722	1.0026	1.0126
	M-SpatPlus64	0.1265	0.1872	0.1296	0.1896	0.1427	0.1952
	M-SpatPlus59	0.0445	0.1379	0.0411	0.1380	0.0751	0.1464
	M-SpatPlus54	0.1724	0.2139	0.1750	0.2155	0.1613	0.2039
	M-SpatPlus49	0.3032	0.3279	0.3092	0.3334	0.3032	0.3278

B Supplementary material: Simulation study 2

This section includes some additional scenarios to complement the analysis of Simulation study 2. The data is generated following the generating models (13)-(14) with $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)' = (0.12, 0.03)'$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)' = (0.15, 0.20)'$ and $\mathbf{X}_1^*$ is simulated such that its correlation with spatial effects of crime 1, θ_1 , and spatial effects of crime 2, θ_2 , is the desired one. Below we define the correlations between $\mathbf{X}_1^*$, θ_1 and θ_2 chosen in each scenario:

- **Scenario 3:** $\rho = 0.5$, $\text{cor}(\mathbf{X}_1^*, \theta_1) = 0.5$ and $\text{cor}(\mathbf{X}_1^*, \theta_2) = 0.7$ are chosen. This is similar to Scenario 1 but choosing medium correlation between the crimes.
- **Scenario 4:** $\rho = 0.3$, $\text{cor}(\mathbf{X}_1^*, \theta_1) = 0.3$ and $\text{cor}(\mathbf{X}_1^*, \theta_2) = 0.7$ are chosen.
- **Scenario 5:** $\rho = 0.3$, $\text{cor}(\mathbf{X}_1^*, \theta_1) = 0.0$ and $\text{cor}(\mathbf{X}_1^*, \theta_2) = 0.7$ are chosen.

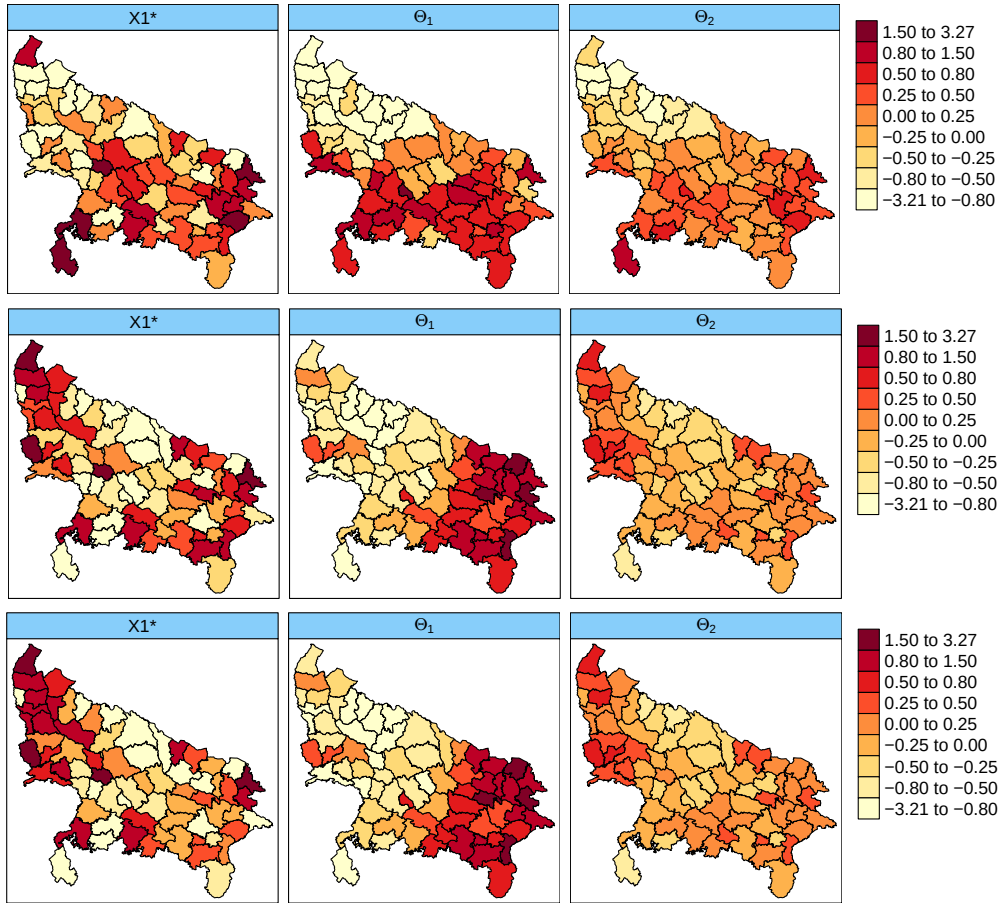


Figure B.4: From left to right, standardized simulated covariate $\mathbf{X}_1^*$, spatial effects θ_1 for crime 1 and spatial effects θ_2 for crime 2 in Simulation Study 2. The first row corresponds to Scenario 3, the second to Scenario 4 and the third to Scenario 5.

Table B.12: Posterior medians and 95% credible intervals of estimated correlations between crime 1 and crime 2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 2 and Scenarios 3, 4 and 5.

	Model	ICAR			PCAR			BYM2		
		Median	95% CI		Median	95% CI		Median	95% CI	
Scenario 3	M-Spatial	0.6203	0.3352	0.8260	0.6418	0.4166	0.8199	0.7990	0.5477	0.9377
	M-SpatPlus64	0.6126	0.3536	0.8014	0.6462	0.4428	0.8016	0.7140	0.4357	0.8897
	M-SpatPlus59	0.5834	0.3198	0.7797	0.6232	0.4125	0.7864	0.6801	0.3979	0.8674
	M-SpatPlus54	0.5828	0.3236	0.7758	0.6172	0.4091	0.7805	0.6834	0.3991	0.8716
	M-SpatPlus49	0.6073	0.3579	0.7920	0.6325	0.4258	0.7932	0.7046	0.4330	0.8810
	M-SpatPlus44	0.6092	0.3654	0.7900	0.6279	0.4240	0.7877	0.7168	0.4499	0.8896
	M-SpatPlus39	0.5939	0.3435	0.7810	0.6166	0.4060	0.7816	0.7076	0.4324	0.8870
Scenario 4	M-Spatial	0.4241	0.1001	0.6840	0.2636	-0.0474	0.5602	0.4675	0.1177	0.7309
	M-SpatPlus64	0.4637	0.1638	0.7025	0.3693	0.0808	0.6334	0.5192	0.2178	0.7557
	M-SpatPlus59	0.5060	0.2373	0.7170	0.4268	0.1553	0.6666	0.5622	0.2943	0.7680
	M-SpatPlus54	0.4995	0.2308	0.7115	0.4195	0.1455	0.6612	0.5566	0.2879	0.7644
	M-SpatPlus49	0.5190	0.2562	0.7248	0.4416	0.1662	0.6824	0.5738	0.3085	0.7777
	M-SpatPlus44	0.5437	0.2947	0.7387	0.4648	0.1944	0.6977	0.6016	0.3478	0.7931
	M-SpatPlus39	0.5535	0.3082	0.7448	0.4730	0.2012	0.7052	0.6144	0.3685	0.8000
Scenario 5	M-Spatial	0.5283	0.2245	0.7629	0.3750	0.0832	0.6423	0.6028	0.2939	0.8212
	M-SpatPlus64	0.4963	0.2045	0.7218	0.4127	0.1107	0.6768	0.5293	0.2380	0.7546
	M-SpatPlus59	0.5199	0.2571	0.7243	0.4543	0.1797	0.6892	0.5594	0.2950	0.7638
	M-SpatPlus54	0.5011	0.2357	0.7091	0.4350	0.1562	0.6751	0.5404	0.2738	0.7488
	M-SpatPlus49	0.5049	0.2409	0.7125	0.4391	0.1613	0.6772	0.5447	0.2798	0.7527
	M-SpatPlus44	0.5287	0.2761	0.7275	0.4650	0.1943	0.6956	0.5704	0.3157	0.7660
	M-SpatPlus39	0.5217	0.2701	0.7214	0.4528	0.1773	0.6895	0.5742	0.3167	0.7730

Table B.13: Posterior means and standard deviations of β_1 based on 300 simulated datasets for Simulation study 2 and Scenarios 3, 4 and 5.

	Model	True value	ICAR		PCAR		BYM2	
			Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
Scenario 3	M-Spatial	0.1500	0.2715	0.0807	0.2753	0.0813	0.2720	0.0822
	M-SpatPlus64		0.1948	0.0657	0.1921	0.0653	0.1925	0.0670
	M-SpatPlus59		0.1927	0.0626	0.1909	0.0624	0.1931	0.0641
	M-SpatPlus54		0.1758	0.0595	0.1745	0.0593	0.1764	0.0611
	M-SpatPlus49		0.1527	0.0576	0.1511	0.0575	0.1519	0.0595
	M-SpatPlus44		0.1389	0.0554	0.1379	0.0554	0.1386	0.0578
	M-SpatPlus39		0.1465	0.0538	0.1455	0.0539	0.1475	0.0563
Scenario 4	M-Spatial	0.1500	0.3082	0.0726	0.3111	0.0751	0.3149	0.0747
	M-SpatPlus64		0.2722	0.0686	0.2725	0.0709	0.2743	0.0703
	M-SpatPlus59		0.2213	0.0648	0.2193	0.0672	0.2193	0.0661
	M-SpatPlus54		0.2205	0.0632	0.2190	0.0656	0.2194	0.0646
	M-SpatPlus49		0.2018	0.0619	0.2004	0.0642	0.2005	0.0634
	M-SpatPlus44		0.1758	0.0607	0.1743	0.0630	0.1743	0.0628
	M-SpatPlus39		0.1536	0.0568	0.1527	0.0592	0.1529	0.0596
Scenario 5	M-Spatial	0.1500	0.2368	0.0776	0.2317	0.0799	0.2374	0.0792
	M-SpatPlus64		0.2096	0.0703	0.2104	0.0724	0.2111	0.0718
	M-SpatPlus59		0.1635	0.0660	0.1618	0.0682	0.1602	0.0674
	M-SpatPlus54		0.1661	0.0640	0.1648	0.0662	0.1639	0.0655
	M-SpatPlus49		0.1572	0.0624	0.1559	0.0646	0.1555	0.0641
	M-SpatPlus44		0.1312	0.0612	0.1300	0.0633	0.1288	0.0633
	M-SpatPlus39		0.1202	0.0571	0.1194	0.0593	0.1188	0.0599

Table B.14: Posterior means and standard deviations of β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 2 and Scenarios 3, 4 and 5.

	Model	True value	ICAR		PCAR		BYM2	
			Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
Scenario 3	M-Spatial	0.2000	0.3540	0.0423	0.3788	0.0446	0.3759	0.0442
	M-SpatPlus64		0.2602	0.0381	0.2633	0.0425	0.2630	0.0412
	M-SpatPlus59		0.2402	0.0375	0.2413	0.0415	0.2401	0.0405
	M-SpatPlus54		0.2132	0.0368	0.2144	0.0407	0.2111	0.0399
	M-SpatPlus49		0.1977	0.0357	0.1998	0.0394	0.1962	0.0389
	M-SpatPlus44		0.1780	0.0359	0.1793	0.0392	0.1773	0.0397
	M-SpatPlus39		0.1764	0.0350	0.1776	0.0384	0.1761	0.0389
Scenario 4	M-Spatial	0.2000	0.3474	0.0384	0.3578	0.0398	0.3648	0.0399
	M-SpatPlus64		0.3157	0.0378	0.3177	0.0389	0.3259	0.0395
	M-SpatPlus59		0.2603	0.0391	0.2612	0.0399	0.2623	0.0409
	M-SpatPlus54		0.2479	0.0385	0.2486	0.0393	0.2491	0.0404
	M-SpatPlus49		0.2333	0.0380	0.2333	0.0387	0.2344	0.0399
	M-SpatPlus44		0.2049	0.0389	0.2051	0.0395	0.2066	0.0413
	M-SpatPlus39		0.1620	0.0380	0.1623	0.0386	0.1635	0.0409
Scenario 5	M-Spatial	0.2000	0.3707	0.0392	0.3883	0.0404	0.3899	0.0405
	M-SpatPlus64		0.3251	0.0379	0.3257	0.0388	0.3327	0.0393
	M-SpatPlus59		0.2702	0.0394	0.2704	0.0402	0.2714	0.0411
	M-SpatPlus54		0.2542	0.0387	0.2545	0.0394	0.2548	0.0404
	M-SpatPlus49		0.2396	0.0382	0.2395	0.0389	0.2401	0.0400
	M-SpatPlus44		0.2140	0.0390	0.2139	0.0397	0.2150	0.0412
	M-SpatPlus39		0.1680	0.0384	0.1680	0.0390	0.1689	0.0411

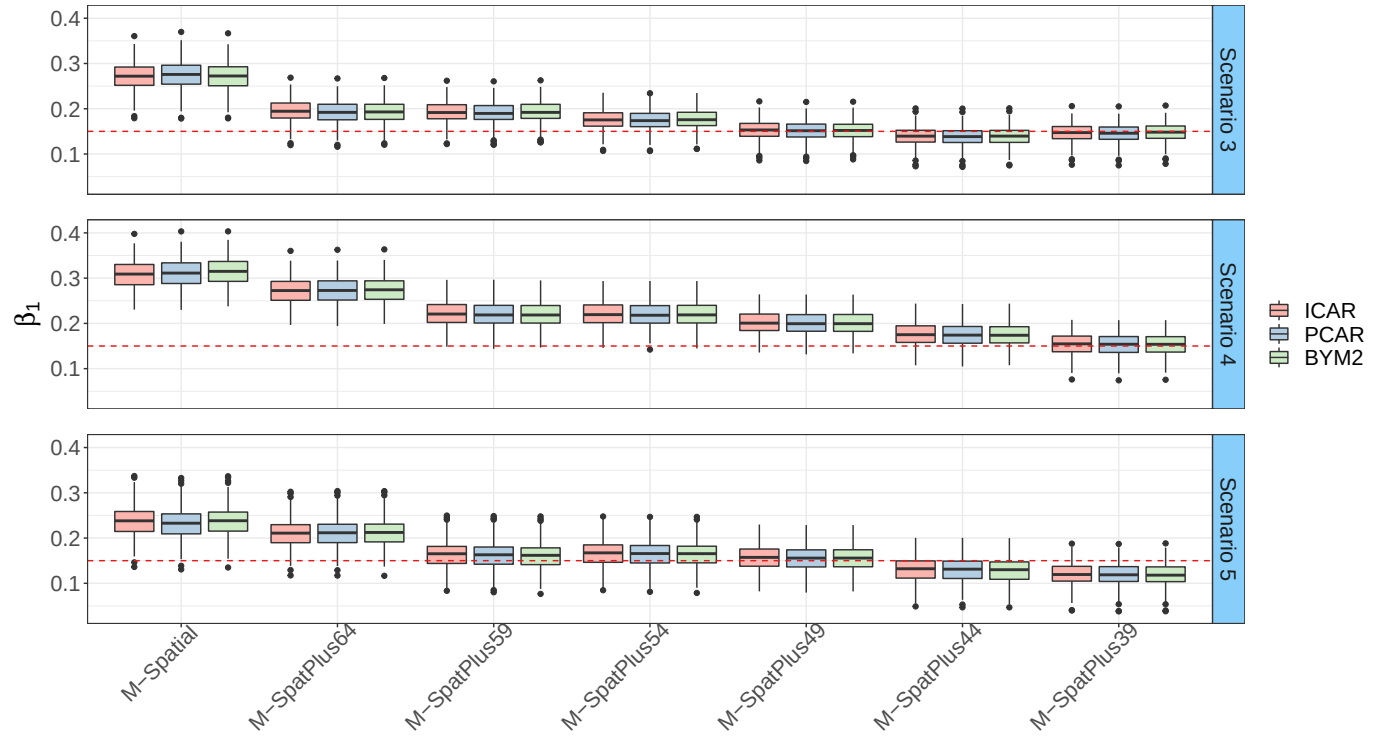


Figure B.5: Boxplots of the estimated means of β_1 based on 300 simulated datasets for Simulation Study 2, Scenarios 3, 4, 5 and 6 (ordered from top to bottom). Each color represents a different prior given to the columns of Φ , namely, red for ICAR, blue for PCAR and green for BYM2.

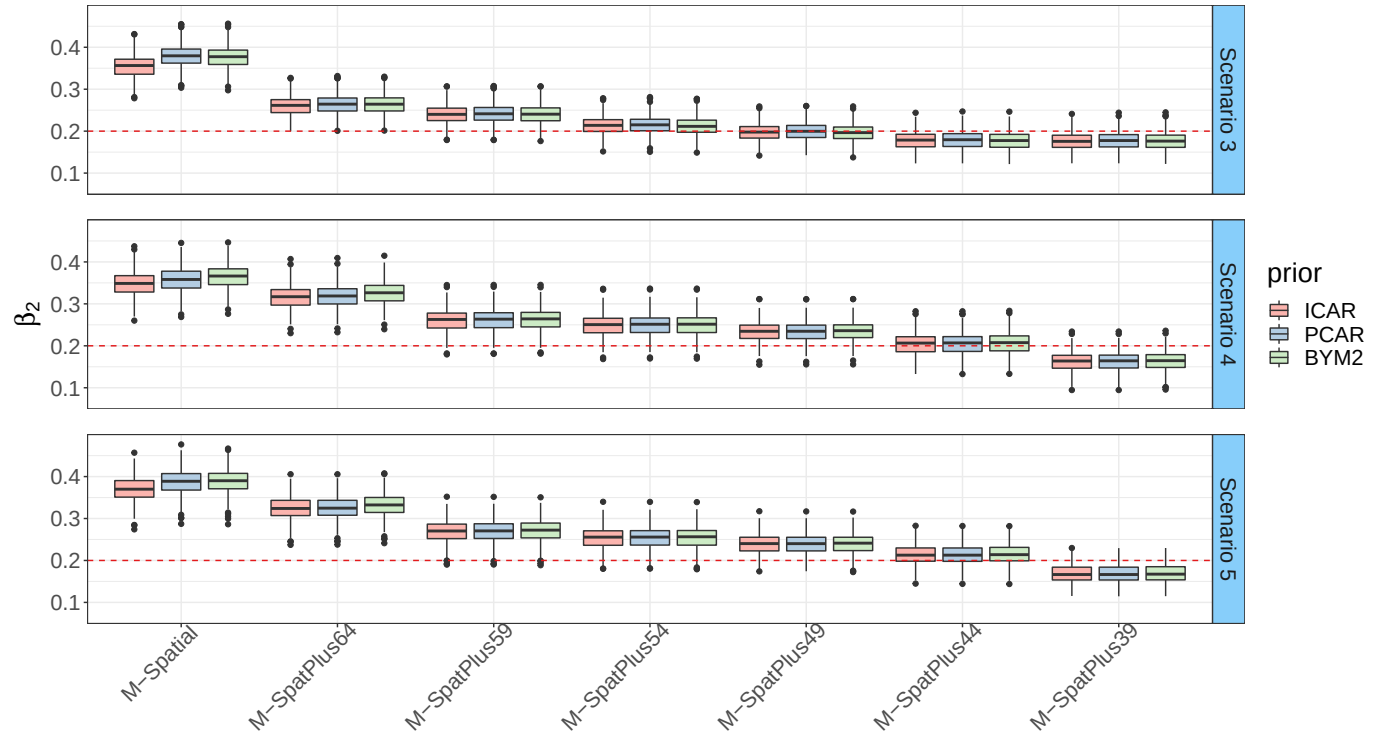


Figure B.6: Boxplots of the estimated means of β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation Study 2, Scenarios 3, 4, 5 and 6 (ordered from top to bottom). Each color represents a different prior given to the columns of Φ , namely, red for ICAR, blue for PCAR and green for BYM2.

Table B.15: Estimated standard errors ($s.e.est$) and simulated standard errors ($s.e.sim$) for β_1 based on 300 simulated datasets for Simulation study 2 and Scenarios 1 to 5.

	Model	ICAR		PCAR		BYM2	
		$s.e.est$	$s.e.sim$	$s.e.est$	$s.e.sim$	$s.e.est$	$s.e.sim$
Scenario 1	M-Spatial	0.0815	0.0338	0.0519	0.0290	0.0846	0.0338
	M-SpatPlus64	0.0612	0.0254	0.0404	0.0214	0.0630	0.0253
	M-SpatPlus59	0.0585	0.0249	0.0393	0.0206	0.0605	0.0250
	M-SpatPlus54	0.0580	0.0242	0.0390	0.0199	0.0599	0.0242
	M-SpatPlus49	0.0563	0.0225	0.0378	0.0191	0.0584	0.0225
	M-SpatPlus44	0.0547	0.0228	0.0555	0.0228	0.0574	0.0230
	M-SpatPlus39	0.0517	0.0204	0.0526	0.0204	0.0549	0.0205
Scenario 2	M-Spatial	0.0685	0.0295	0.0712	0.0299	0.0708	0.0291
	M-SpatPlus64	0.0656	0.0283	0.0681	0.0286	0.0675	0.0280
	M-SpatPlus59	0.0640	0.0275	0.0665	0.0278	0.0656	0.0272
	M-SpatPlus54	0.0625	0.0268	0.0650	0.0271	0.0642	0.0265
	M-SpatPlus49	0.0612	0.0252	0.0636	0.0255	0.0631	0.0249
	M-SpatPlus44	0.0599	0.0266	0.0624	0.0268	0.0624	0.0267
	M-SpatPlus39	0.0568	0.0239	0.0593	0.0241	0.0599	0.0239
Scenario 3	M-Spatial	0.0807	0.0301	0.0813	0.0307	0.0822	0.0302
	M-SpatPlus64	0.0657	0.0246	0.0653	0.0245	0.0670	0.0245
	M-SpatPlus59	0.0626	0.0235	0.0624	0.0234	0.0641	0.0234
	M-SpatPlus54	0.0595	0.0222	0.0593	0.0221	0.0611	0.0221
	M-SpatPlus49	0.0576	0.0211	0.0575	0.0211	0.0595	0.0209
	M-SpatPlus44	0.0554	0.0208	0.0554	0.0208	0.0578	0.0207
	M-SpatPlus39	0.0538	0.0203	0.0539	0.0203	0.0563	0.0203
Scenario 4	M-Spatial	0.0726	0.0316	0.0751	0.0318	0.0747	0.0310
	M-SpatPlus64	0.0686	0.0300	0.0709	0.0302	0.0703	0.0296
	M-SpatPlus59	0.0648	0.0277	0.0672	0.0280	0.0661	0.0275
	M-SpatPlus54	0.0632	0.0269	0.0656	0.0273	0.0646	0.0268
	M-SpatPlus49	0.0619	0.0256	0.0642	0.0259	0.0634	0.0255
	M-SpatPlus44	0.0607	0.0265	0.0630	0.0268	0.0628	0.0266
	M-SpatPlus39	0.0568	0.0235	0.0592	0.0238	0.0596	0.0235
Scenario 5	M-Spatial	0.0776	0.0342	0.0799	0.0344	0.0792	0.0334
	M-SpatPlus64	0.0703	0.0312	0.0724	0.0315	0.0718	0.0307
	M-SpatPlus59	0.0660	0.0294	0.0682	0.0296	0.0674	0.0292
	M-SpatPlus54	0.0640	0.0285	0.0662	0.0287	0.0655	0.0283
	M-SpatPlus49	0.0624	0.0268	0.0646	0.0271	0.0641	0.0266
	M-SpatPlus44	0.0612	0.0279	0.0633	0.0281	0.0633	0.0280
	M-SpatPlus39	0.0571	0.0259	0.0593	0.0262	0.0599	0.0260

Table B.16: Estimated standard errors ($s.e.est$) and simulated standard errors ($s.e.sim$) for β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 2 and Scenarios 1 to 5.

	Model	ICAR		PCAR		BYM2	
		$s.e.est$	$s.e.sim$	$s.e.est$	$s.e.sim$	$s.e.est$	$s.e.sim$
Scenario 1	M-Spatial	0.0476	0.0272	0.0519	0.0290	0.0501	0.0275
	M-SpatPlus64	0.0380	0.0210	0.0404	0.0214	0.0398	0.0211
	M-SpatPlus59	0.0370	0.0203	0.0393	0.0206	0.0388	0.0203
	M-SpatPlus54	0.0367	0.0196	0.0390	0.0199	0.0385	0.0197
	M-SpatPlus49	0.0355	0.0189	0.0378	0.0191	0.0374	0.0189
	M-SpatPlus44	0.0353	0.0199	0.0375	0.0201	0.0375	0.0201
	M-SpatPlus39	0.0341	0.0184	0.0364	0.0186	0.0367	0.0186
Scenario 2	M-Spatial	0.0381	0.0285	0.0393	0.0286	0.0399	0.0279
	M-SpatPlus64	0.0371	0.0276	0.0382	0.0278	0.0392	0.0274
	M-SpatPlus59	0.0380	0.0272	0.0389	0.0273	0.0401	0.0270
	M-SpatPlus54	0.0374	0.0265	0.0383	0.0266	0.0395	0.0263
	M-SpatPlus49	0.0368	0.0258	0.0376	0.0258	0.0389	0.0256
	M-SpatPlus44	0.0378	0.0261	0.0384	0.0261	0.0404	0.0261
	M-SpatPlus39	0.0373	0.0252	0.0379	0.0252	0.0404	0.0254
Scenario 3	M-Spatial	0.0423	0.0284	0.0446	0.0281	0.0442	0.0276
	M-SpatPlus64	0.0381	0.0242	0.0425	0.0250	0.0412	0.0244
	M-SpatPlus59	0.0375	0.0235	0.0415	0.0241	0.0405	0.0237
	M-SpatPlus54	0.0368	0.0222	0.0407	0.0228	0.0399	0.0224
	M-SpatPlus49	0.0357	0.0210	0.0394	0.0216	0.0389	0.0212
	M-SpatPlus44	0.0359	0.0220	0.0392	0.0223	0.0397	0.0224
	M-SpatPlus39	0.0350	0.0218	0.0384	0.0221	0.0389	0.0222
Scenario 4	M-Spatial	0.0384	0.0290	0.0398	0.0295	0.0399	0.0280
	M-SpatPlus64	0.0378	0.0279	0.0389	0.0279	0.0395	0.0273
	M-SpatPlus59	0.0391	0.0267	0.0399	0.0268	0.0409	0.0265
	M-SpatPlus54	0.0385	0.0263	0.0393	0.0263	0.0404	0.0261
	M-SpatPlus49	0.0380	0.0254	0.0387	0.0254	0.0399	0.0252
	M-SpatPlus44	0.0389	0.0262	0.0395	0.0262	0.0413	0.0262
	M-SpatPlus39	0.0380	0.0243	0.0386	0.0243	0.0409	0.0244
Scenario 5	M-Spatial	0.0392	0.0289	0.0404	0.0297	0.0405	0.0284
	M-SpatPlus64	0.0379	0.0271	0.0388	0.0272	0.0393	0.0271
	M-SpatPlus59	0.0394	0.0262	0.0402	0.0263	0.0411	0.0263
	M-SpatPlus54	0.0387	0.0253	0.0394	0.0253	0.0404	0.0254
	M-SpatPlus49	0.0382	0.0240	0.0389	0.0240	0.0400	0.0240
	M-SpatPlus44	0.0390	0.0241	0.0397	0.0241	0.0412	0.0243
	M-SpatPlus39	0.0384	0.0222	0.0390	0.0223	0.0411	0.0224

Table B.17: Empirical 95% coverage probabilities of the true value of β_1 and β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 2 and Scenarios 3, 4 and 5.

		β_1			β_2		
		ICAR	PCAR	BYM2	ICAR	PCAR	BYM2
Scenario 3	M-Spatial	88.3333	85.3333	89.3333	1.3333	0.0000	0.0000
	M-SpatPlus64	100.0000	100.0000	100.0000	73.6667	80.6667	78.0000
	M-SpatPlus59	100.0000	100.0000	100.0000	92.6667	95.6667	95.6667
	M-SpatPlus54	100.0000	100.0000	100.0000	99.0000	99.6667	99.6667
	M-SpatPlus49	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
	M-SpatPlus44	100.0000	100.0000	100.0000	98.6667	99.6667	99.6667
	M-SpatPlus39	100.0000	100.0000	100.0000	98.0000	99.3333	99.0000
Scenario 4	M-Spatial	31.6667	35.0000	28.3333	0.6667	0.6667	0.3333
	M-SpatPlus64	64.3333	68.3333	66.0000	8.0000	8.0000	4.0000
	M-SpatPlus59	98.0000	99.0000	99.0000	70.3333	72.0000	71.0000
	M-SpatPlus54	97.6667	99.0000	98.0000	88.3333	89.0000	90.6667
	M-SpatPlus49	100.0000	100.0000	100.0000	94.6667	94.6667	95.6667
	M-SpatPlus44	100.0000	100.0000	100.0000	99.3333	99.3333	99.3333
	M-SpatPlus39	100.0000	100.0000	100.0000	92.6667	94.0000	95.3333
Scenario 5	M-Spatial	96.6667	98.6667	96.6667	0.3333	0.0000	0.0000
	M-SpatPlus64	99.3333	99.3333	99.3333	2.3333	2.6667	2.0000
	M-SpatPlus59	100.0000	100.0000	100.0000	59.0000	61.0000	62.6667
	M-SpatPlus54	100.0000	100.0000	100.0000	82.0000	83.6667	85.6667
	M-SpatPlus49	100.0000	100.0000	100.0000	93.3333	94.0000	94.6667
	M-Spatplus44	100.0000	100.0000	100.0000	99.3333	99.3333	99.3333
	M-SpatPlus39	100.0000	100.0000	100.0000	96.6667	97.3333	98.3333

Table B.18: DIC and WAIC based on 300 simulated data sets for Simulation Study 2 and Scenarios 3, 4 and 5.

	Model	ICAR		PCAR		BYM2	
		DIC	WAIC	DIC	WAIC	DIC	WAIC
Scenario 3	M-Spatial	967.9454	954.5795	967.5495	952.1199	967.9909	951.7634
	M-SpatPlus64	969.1749	951.7115	970.9422	951.6440	970.9431	950.8905
	M-SpatPlus59	970.2056	951.4510	972.0560	951.7777	972.2680	951.2902
	M-SpatPlus54	972.2309	953.1453	973.6655	952.8703	974.4395	953.3604
	M-SpatPlus49	973.2094	954.5434	974.3598	953.7926	975.3738	954.5668
	M-SpatPlus44	974.3461	955.1660	975.2471	954.0045	976.5248	955.1149
	M-SpatPlus39	974.7621	955.7078	975.6728	954.5366	976.9174	955.6734
Scenario 4	M-Spatial	966.8835	950.9785	967.8758	948.4934	967.5878	947.7641
	M-SpatPlus64	967.1693	949.2779	968.0115	946.6388	968.0098	946.4287
	M-SpatPlus59	969.9224	948.3949	970.8501	946.1590	971.2409	947.0300
	M-SpatPlus54	970.9355	949.3026	971.8493	947.1336	972.3405	948.2459
	M-SpatPlus49	972.1451	950.7576	973.0600	948.5624	973.5596	949.7205
	M-SpatPlus44	974.2859	952.6960	975.0717	950.2682	975.6985	951.5074
	M-SpatPlus39	978.3585	957.7842	979.0163	955.1304	979.6206	956.2045
Scenario 5	M-Spatial	965.3720	950.3049	966.0718	947.7260	965.6266	946.7197
	M-SpatPlus64	965.5671	947.2383	966.5097	945.1004	966.4342	944.4985
	M-SpatPlus59	968.6013	946.5191	969.6242	944.7155	969.9139	945.2128
	M-SpatPlus54	969.9959	947.6624	971.0162	945.9452	971.4843	946.7808
	M-SpatPlus49	971.3763	949.1848	972.3350	947.4099	972.8820	948.4109
	M-SpatPlus44	973.5362	951.3029	974.4013	949.3644	975.0159	950.4543
	M-SpatPlus39	978.1803	956.8477	978.9062	954.5679	979.5386	955.6113

Table B.19: Average value of mean absolute relative bias (MARB) and mean relative root mean prediction error (MRRMSE) of the relative risks based on 300 simulated datasets for Simulation study 2 and Scenarios 1 to 5.

	Model	ICAR		PCAR		BYM2	
		MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE
Scenario 1	M-Spatial	0.0675	0.1550	0.0649	0.1567	0.0639	0.1557
	M-SpatPlus64	0.0652	0.1567	0.0632	0.1585	0.0626	0.1579
	M-SpatPlus59	0.0660	0.1579	0.0643	0.1597	0.0642	0.1592
	M-SpatPlus54	0.0657	0.1583	0.0638	0.1601	0.0639	0.1598
	M-SpatPlus49	0.0694	0.1608	0.0671	0.1623	0.0676	0.1622
	M-SpatPlus44	0.0695	0.1612	0.0671	0.1626	0.0677	0.1626
	M-SpatPlus39	0.0737	0.1655	0.0705	0.1666	0.0715	0.1669
Scenario 2	M-Spatial	0.0634	0.1580	0.0597	0.1597	0.0602	0.1594
	M-SpatPlus64	0.0623	0.1585	0.0584	0.1601	0.0589	0.1598
	M-SpatPlus59	0.0608	0.1606	0.0571	0.1621	0.0583	0.1621
	M-SpatPlus54	0.0616	0.1615	0.0580	0.1630	0.0593	0.1630
	M-SpatPlus49	0.0622	0.1632	0.0593	0.1646	0.0601	0.1647
	M-SpatPlus44	0.0616	0.1649	0.0588	0.1663	0.0595	0.1664
	M-SpatPlus39	0.0685	0.1705	0.0651	0.1718	0.0657	0.1718
Scenario 3	M-Spatial	0.0668	0.1545	0.0647	0.1555	0.0650	0.1555
	M-SpatPlus64	0.0625	0.1571	0.0614	0.1598	0.0608	0.1592
	M-SpatPlus59	0.0618	0.1584	0.0617	0.1612	0.0609	0.1608
	M-SpatPlus54	0.0633	0.1612	0.0624	0.1634	0.0627	0.1637
	M-SpatPlus49	0.0669	0.1641	0.0650	0.1657	0.0659	0.1665
	M-SpatPlus44	0.0652	0.1648	0.0637	0.1663	0.0644	0.1673
	M-SpatPlus39	0.0674	0.1661	0.0654	0.1674	0.0665	0.1684
Scenario 4	M-Spatial	0.0621	0.1540	0.0588	0.1557	0.0596	0.1554
	M-SpatPlus64	0.0600	0.1552	0.0564	0.1569	0.0572	0.1566
	M-SpatPlus59	0.0586	0.1596	0.0550	0.1612	0.0569	0.1612
	M-SpatPlus54	0.0595	0.1608	0.0559	0.1623	0.0578	0.1625
	M-SpatPlus49	0.0608	0.1627	0.0578	0.1642	0.0594	0.1643
	M-SpatPlus44	0.0602	0.1643	0.0570	0.1657	0.0584	0.1659
	M-SpatPlus39	0.0691	0.1706	0.0654	0.1718	0.0665	0.1719
Scenario 5	M-Spatial	0.0594	0.1511	0.0571	0.1528	0.0574	0.1524
	M-SpatPlus64	0.0559	0.1527	0.0534	0.1545	0.0536	0.1543
	M-SpatPlus59	0.0547	0.1573	0.0519	0.1589	0.0532	0.1590
	M-SpatPlus54	0.0559	0.1590	0.0533	0.1606	0.0548	0.1608
	M-SpatPlus49	0.0575	0.1606	0.0550	0.1622	0.0565	0.1625
	M-SpatPlus44	0.0564	0.1625	0.0539	0.1640	0.0554	0.1643
	M-SpatPlus39	0.0642	0.1688	0.0611	0.1701	0.0624	0.1703

Table B.20: Length of the 95% credible intervals of β_1 and β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 2 and Scenarios 1 to 5.

		β_1			β_2		
	Model	ICAR	PCAR	BYM2	ICAR	PCAR	BYM2
Scenario 1	M-Spatial	0.3208	0.3293	0.3328	0.1871	0.2039	0.1972
	M-SpatPlus64	0.2407	0.2435	0.2478	0.1495	0.1587	0.1565
	M-SpatPlus59	0.2304	0.2331	0.2382	0.1455	0.1546	0.1527
	M-SpatPlus54	0.2280	0.2309	0.2358	0.1443	0.1534	0.1516
	M-SpatPlus49	0.2215	0.2245	0.2298	0.1395	0.1485	0.1469
	M-SpatPlus44	0.2154	0.2184	0.2259	0.1389	0.1474	0.1476
	M-SpatPlus39	0.2036	0.2067	0.2161	0.1341	0.1429	0.1442
Scenario 2	M-Spatial	0.2694	0.2800	0.2785	0.1499	0.1543	0.1569
	M-SpatPlus64	0.2579	0.2678	0.2655	0.1460	0.1502	0.1542
	M-SpatPlus59	0.2515	0.2615	0.2582	0.1495	0.1530	0.1575
	M-SpatPlus54	0.2457	0.2555	0.2524	0.1472	0.1505	0.1552
	M-SpatPlus49	0.2408	0.2503	0.2481	0.1448	0.1478	0.1531
	M-SpatPlus44	0.2355	0.2453	0.2455	0.1485	0.1509	0.1588
	M-SpatPlus39	0.2232	0.2331	0.2358	0.1467	0.1488	0.1588
Scenario 3	M-Spatial	0.3175	0.3197	0.3234	0.1664	0.1753	0.1736
	M-SpatPlus64	0.2584	0.2567	0.2635	0.1499	0.1671	0.1619
	M-SpatPlus59	0.2464	0.2452	0.2522	0.1474	0.1632	0.1591
	M-SpatPlus54	0.2341	0.2330	0.2404	0.1445	0.1598	0.1570
	M-SpatPlus49	0.2266	0.2261	0.2340	0.1402	0.1547	0.1531
	M-SpatPlus44	0.2179	0.2178	0.2274	0.1410	0.1540	0.1560
	M-SpatPlus39	0.2118	0.2118	0.2215	0.1377	0.1509	0.1532
Scenario 4	M-Spatial	0.2855	0.2953	0.2940	0.1509	0.1566	0.1570
	M-SpatPlus64	0.2699	0.2788	0.2764	0.1486	0.1530	0.1554
	M-SpatPlus59	0.2547	0.2641	0.2601	0.1535	0.1568	0.1608
	M-SpatPlus54	0.2486	0.2579	0.2541	0.1514	0.1546	0.1589
	M-SpatPlus49	0.2434	0.2525	0.2494	0.1492	0.1522	0.1570
	M-SpatPlus44	0.2385	0.2477	0.2471	0.1529	0.1554	0.1625
	M-SpatPlus39	0.2234	0.2327	0.2346	0.1494	0.1517	0.1610
Scenario 5	M-Spatial	0.3051	0.3141	0.3113	0.1540	0.1585	0.1592
	M-SpatPlus64	0.2764	0.2849	0.2825	0.1488	0.1526	0.1544
	M-SpatPlus59	0.2595	0.2683	0.2650	0.1548	0.1579	0.1614
	M-SpatPlus54	0.2515	0.2602	0.2576	0.1520	0.1550	0.1589
	M-SpatPlus49	0.2456	0.2539	0.2521	0.1501	0.1531	0.1572
	M-SpatPlus44	0.2405	0.2489	0.2490	0.1534	0.1560	0.1621
	M-SpatPlus39	0.2246	0.2332	0.2356	0.1507	0.1534	0.1618

Table B.21: Average value of mean absolute relative bias (MARB) and mean relative root mean prediction error (MRRMSE) of β_1 based on 300 simulated datasets for Simulation study 2 and Scenarios 1 to 5.

	Model	ICAR		PCAR		BYM2	
		MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE
Scenario 1	M-Spatial	0.8006	0.8317	0.8439	0.8738	0.8399	0.8696
	M-SpatPlus64	0.2523	0.3038	0.2473	0.2997	0.2635	0.3130
	M-SpatPlus59	0.2762	0.3223	0.2766	0.3227	0.3076	0.3500
	M-SpatPlus54	0.1391	0.2129	0.1365	0.2114	0.1541	0.2233
	M-SpatPlus49	0.0534	0.1595	0.0527	0.1594	0.0663	0.1642
	M-SpatPlus44	0.0632	0.1645	0.0618	0.1642	0.0499	0.1611
	M-SpatPlus39	0.1601	0.2101	0.1598	0.2100	0.1407	0.1961
Scenario 2	M-Spatial	0.7923	0.8164	0.8174	0.8414	0.8222	0.8448
	M-SpatPlus64	0.6038	0.6326	0.5998	0.6295	0.6044	0.6326
	M-SpatPlus59	0.4398	0.4764	0.4267	0.4652	0.4265	0.4635
	M-SpatPlus54	0.4486	0.4828	0.4380	0.4738	0.4424	0.4765
	M-SpatPlus49	0.3310	0.3712	0.3216	0.3637	0.3233	0.3635
	M-SpatPlus44	0.1332	0.2217	0.1235	0.2174	0.1222	0.2156
	M-SpatPlus39	0.0304	0.1623	0.0368	0.1651	0.0395	0.1639
Scenario 3	M-Spatial	0.8103	0.8347	0.8355	0.8602	0.8133	0.8378
	M-SpatPlus64	0.2987	0.3408	0.2809	0.3250	0.2833	0.3270
	M-SpatPlus59	0.2849	0.3251	0.2730	0.3144	0.2871	0.3267
	M-SpatPlus54	0.1723	0.2271	0.1634	0.2199	0.1762	0.2295
	M-SpatPlus49	0.0178	0.1415	0.0074	0.1406	0.0129	0.1400
	M-SpatPlus44	0.0739	0.1570	0.0810	0.1604	0.0761	0.1578
	M-SpatPlus39	0.0235	0.1376	0.0299	0.1387	0.0164	0.1360
Scenario 4	M-Spatial	1.0548	1.0756	1.0739	1.0947	1.0995	1.1188
	M-SpatPlus64	0.8148	0.8390	0.8169	0.8414	0.8285	0.8518
	M-SpatPlus59	0.4753	0.5099	0.4623	0.4986	0.4622	0.4973
	M-SpatPlus54	0.4700	0.5032	0.4598	0.4944	0.4627	0.4960
	M-SpatPlus49	0.3457	0.3855	0.3359	0.3778	0.3368	0.3774
	M-SpatPlus44	0.1719	0.2464	0.1623	0.2411	0.1619	0.2401
	M-SpatPlus39	0.0240	0.1585	0.0178	0.1596	0.0193	0.1579
Scenario 5	M-Spatial	0.5787	0.6219	0.5447	0.5910	0.5826	0.6238
	M-SpatPlus64	0.3976	0.4488	0.4029	0.4542	0.4070	0.4557
	M-SpatPlus59	0.0902	0.2156	0.0787	0.2125	0.0678	0.2060
	M-SpatPlus54	0.1071	0.2178	0.0984	0.2151	0.0926	0.2102
	M-SpatPlus49	0.0482	0.1852	0.0392	0.1846	0.0369	0.1814
	M-SpatPlus44	0.1255	0.2244	0.1332	0.2299	0.1413	0.2339
	M-SpatPlus39	0.1989	0.2636	0.2041	0.2685	0.2077	0.2704

Table B.22: Average value of mean absolute relative bias (MARB) and mean relative root mean prediction error (MRRMSE) of β_2 based on 300 simulated datasets for Simulation study 2 and Scenarios 1 to 5.

	Model	ICAR		PCAR		BYM2	
		MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE	MARB	MRRMSE
Scenario 1	M-Spatial	0.5088	0.5267	0.6421	0.6583	0.5893	0.6051
	M-SpatPlus64	0.0274	0.1087	0.0255	0.1098	0.0345	0.1109
	M-SpatPlus59	0.0309	0.1061	0.0327	0.1081	0.0263	0.1050
	M-SpatPlus54	0.0854	0.1301	0.0856	0.1314	0.0850	0.1300
	M-SpatPlus49	0.1297	0.1604	0.1303	0.1616	0.1277	0.1587
	M-SpatPlus44	0.1976	0.2213	0.2003	0.2241	0.1936	0.2181
	M-SpatPlus39	0.3479	0.3599	0.3492	0.3614	0.3440	0.3564
Scenario 2	M-Spatial	0.4378	0.4603	0.4570	0.4789	0.4984	0.5175
	M-SpatPlus64	0.3371	0.3643	0.3471	0.3738	0.3855	0.4091
	M-SpatPlus59	0.1968	0.2392	0.2017	0.2436	0.2116	0.2509
	M-SpatPlus54	0.1568	0.2053	0.1616	0.2092	0.1683	0.2134
	M-SpatPlus49	0.0945	0.1599	0.0949	0.1601	0.1065	0.1666
	M-SpatPlus44	0.0619	0.1445	0.0601	0.1436	0.0474	0.1391
	M-SpatPlus39	0.2732	0.3009	0.2709	0.2988	0.2641	0.2931
Scenario 3	M-Spatial	0.7698	0.7827	0.8939	0.9049	0.8795	0.8902
	M-SpatPlus64	0.3011	0.3245	0.3167	0.3406	0.3150	0.3377
	M-SpatPlus59	0.2010	0.2327	0.2063	0.2390	0.2004	0.2329
	M-SpatPlus54	0.0659	0.1289	0.0721	0.1349	0.0556	0.1250
	M-SpatPlus49	0.0115	0.1057	0.0009	0.1080	0.0188	0.1079
	M-SpatPlus44	0.1098	0.1553	0.1034	0.1522	0.1133	0.1592
	M-SpatPlus39	0.1181	0.1606	0.1122	0.1574	0.1193	0.1630
Scenario 4	M-Spatial	0.7372	0.7513	0.7891	0.8029	0.8242	0.8360
	M-SpatPlus64	0.5784	0.5950	0.5887	0.6051	0.6296	0.6442
	M-SpatPlus59	0.3016	0.3298	0.3060	0.3340	0.3115	0.3385
	M-SpatPlus54	0.2395	0.2732	0.2430	0.2763	0.2454	0.2779
	M-SpatPlus49	0.1667	0.2094	0.1664	0.2093	0.1722	0.2133
	M-SpatPlus44	0.0244	0.1333	0.0257	0.1335	0.0329	0.1348
	M-SpatPlus39	0.1900	0.2256	0.1884	0.2242	0.1827	0.2198
Scenario 5	M-Spatial	0.8536	0.8657	0.9415	0.9531	0.9496	0.9602
	M-SpatPlus64	0.6253	0.6399	0.6285	0.6431	0.6637	0.6774
	M-SpatPlus59	0.3510	0.3747	0.3518	0.3756	0.3568	0.3804
	M-SpatPlus54	0.2712	0.2992	0.2725	0.3005	0.2739	0.3019
	M-SpatPlus49	0.1982	0.2316	0.1973	0.2309	0.2004	0.2336
	M-SpatPlus44	0.0699	0.1394	0.0696	0.1393	0.0749	0.1426
	M-SpatPlus39	0.1601	0.1950	0.1600	0.1949	0.1555	0.1917