Математические заметки

Том 95 выпуск 6 июнь 2014

УДК 511.9

Внутренние полиэдры Клейна

И. А. Макаров

Выпуклая оболочка всех целых точек в некомпактном полиэдре замкнута и является обобщенным полиэдром лишь при некоторых условиях. В работе доказывается, что если ограничиться целыми точками во внутренности полиэдра, большинство условий можно опустить. При этом получается объект, имеющий свойства, похожие на свойства полиэдра Клейна, и совпадающий с полиэдром Клейна в случае иррационального симплициального конуса.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm9340

1. Введение

1.1. Геометрия цепных дробей в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим два иррациональных числа α и β. Их цепные дроби допускают следующее геометрическое представление. Рассмотрим две прямые в $\mathbb{R}^2$, порожденные векторами $(1,\alpha)$ и $(1,\beta)$. Эти прямые разбивают плоскость на четыре угла (которые мы будем называть *конусами*, согласно терминологии будущих многомерных обобщений). Внутри каждого конуса рассмотрим выпуклую оболочку ненулевых целых точек. Получившиеся четыре неограниченных выпуклых многоугольника называются *полигонами Клейна*. Их границами являются четыре неограниченные ломаные, составленные из счетного числа отрезков. При условии $\alpha > 0 > \beta > -1$ имеет место точное соответствие (см. [1]) между вершинами полигонов Клейна и подходящими дробями чисел α и β, при котором вершине (q,p), если $q>0$, соответствует подходящая дробь p/q числа α или β, и наоборот. Аналогичное соответствие имеется между неполными частными чисел α и β и целочисленными длинами ребер полигонов Клейна.

В случае рациональных α, β, например, $\alpha=8/5$, $\beta=5/8$, границей полигона Клейна оказывается неограниченная ломаная, составленная из конечного числа отрезков (четырех) и двух лучей (см. рис. 1). *Внутренний полигон Клейна* определяется как выпуклая оболочка целых точек строго внутри каждого конуса. В случае, когда $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, его граница совпадает с границей полигона Клейна. В случае же рациональных α, β мы получаем, рассматривая один из четырех конусов, что граница внутреннего полигона Клейна будет отличаться от границы полигона Клейна на двух последних вершинах ломаной с обоих концов: крайние вершины границы полигона Клейна не будут являться вершинами границы внутреннего полигона

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (грант № МК-5016.2012.1).

© И. А. Макаров, 2014

Клейна – вместо них выступят вершины, соответствующие последним промежуточном дробям чисел α и β (ближайшие к крайним вершинам полигона Клейна целые точки, лежащие на крайних ограниченных ребрах границы полигона Клейна), а два неограниченных луча границы внутреннего полигона Клейна выйдут уже из новых целых точек параллельно направляющим конуса (см. рис. 2).

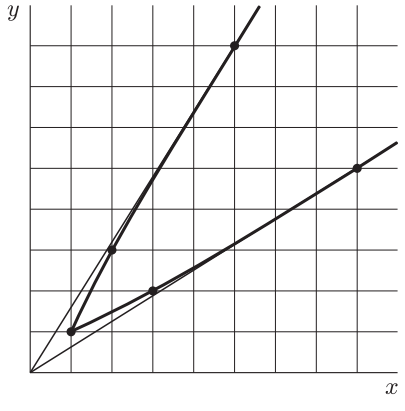


Рис. 1

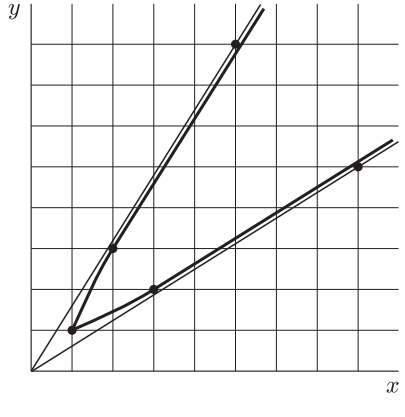


Рис. 2

Таким образом, свойства чисел, выраженные цепными дробями, могут быть интерпретированы как свойства границ полигонов Клейна или границ внутренних полигонов Клейна.

1.2. Многомерное обобщение. Под многомерным обобщением понятия цепной дроби понимается конструкция, имеющая ряд свойств цепной дроби. Попытки придумать обобщение понятия цепной дроби велись как в геометрическом направлении, так и в арифметическом (см. [2]) и аналитическом (см. [3]).

Многомерное геометрическое обобщение приведенной в предыдущем пункте конструкции было предложено Клейном более ста лет назад (см. [4]). Если в двумерном случае главную роль играют границы *полигонов* Клейна, являющиеся по сути

геометрической интерпретацией понятия цепных дробей, то в произвольной размерности основными объектами исследования будут границы *полиэдров* Клейна, называемые *парусами*. Это одно из наиболее известных и исследованных многомерных обобщений цепных дробей. Наиболее изученными являются паруса, соответствующие алгебраическим конусам (см. [5]–[6]). В работах [7] и [8]–[12] были рассмотрены свойства произвольных парусов. Некоторые обобщения касательно метрической теории цепных дробей были проделаны в работе [13], в которой получен ряд статистических результатов о парусах. Интересные статистические аспекты полиэдров Клейна целочисленных решеток были рассмотрены в работах [14], [15]. Вопросы исследования замкнутости выпуклых оболочек в замкнутых множествах некоторых типов были рассмотрены в работе [16].

Настоящая работа посвящена определению модификации классического полиэдра Клейна – внутреннего полиэдра Клейна – и изучению некоторых его свойств на основании результатов, полученных в работе [17].

2. Формулировка основных результатов

2.1. Некоторые определения. *Полиэдром* C называется подмножество $\mathbb{R}^d$, равное пересечению конечного числа полупространств:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h_i, x) \geqslant c_i,\ h_i \in \mathbb{R}^d,\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\},$$

где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – скалярное произведение. Говорят, что набор $((h_1, c_1), \dots, (h_n, c_n))$ *порождает* полиэдр C.

Множество E называется *обобщенным полиэдром*, если для любого компактного полиэдра P множество $(E \cap P)$ тоже является компактным полиэдром.

Пусть дано множество $U \subseteq \mathbb{R}^d$. *Выпуклой оболочкой* множества U называется множество

$$\operatorname{conv} U = \left\{ \sum_i \lambda_i u_i \;\middle|\; u_i \in U,\ \lambda_i \in [0,1],\ \sum_i \lambda_i = 1 \right\}.$$

Конусом множества U назовем

$$\operatorname{cone}(U) = \left\{ \sum_i \lambda_i u_i \;\middle|\; u_i \in U,\ \lambda_i \geqslant 0 \right\}.$$

Асимптотическим конусом выпуклого множества $C \in \mathbb{R}^d$ называется

$$C_{\text{as}}(C) = \{u \in \mathbb{R}^d \mid x + \lambda u \in C \ \ \forall x \in C\ \forall \lambda \geqslant 0\}.$$

Через $B(x, r)$ мы обозначим *замкнутый шар* с центром в x радиуса r относительно стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^d$.

Линейное (аффинное) подпространство $V \subset \mathbb{R}^d$ называется *целым*, если его размерность $\dim V$ равна размерности максимальной аффинной подрешетки $\mathbb{Z}^d$, в нем содержащейся.

Опорной гиперплоскостью к C называется гиперплоскость $H = \{(h, x) = c\}$, имеющая непустое пересечение с C, для которой выполнено $(h, x') \geqslant c$ для любого $x' \in C$. *Гранью* полиэдра C называется непустое пересечение C с опорной к нему гиперплоскостью. Грань F называется *целой*, если ее аффинная оболочка является целой.

2.2. Результат Муссафира и полиэдры Клейна. Муссафир в работе [17; теорема 2.1] получил следующий результат.

ТЕОРЕМА А. *Пусть C – полиэдр, не содержащий прямых, асимптотический конус которого имеет непустую внутренность, и все грани которого удовлетворяют одному из следующих условий*:

- *либо все грани не содержат ненулевых целых точек,*
- *либо все грани целые.* (∗)

Тогда множество $K_{\mathfrak{M}}(C) = \operatorname{conv}(C \cap \mathbb{Z}^d)$ замкнуто и является обобщенным полиэдром.

В случае, когда C – *симплициальный конус с началом в* 0, т.е. число гиперплоскостей h_i, порождающих полиэдр C, равно d, h_i линейно независимы (отсюда следует, что C не содержит прямых), $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, d$, множество $K(C) = \operatorname{conv}((C \setminus \{0\}) \cap \mathbb{Z}^d)$ называется *полиэдром Клейна* и является обобщением понятия цепной дроби на многомерный случай. Грани полиэдра Клейна и некоторые их целочисленные характеристики оказываются многомерными обобщениями понятий неполных частных цепной дроби.

Все существующие на данный момент результаты про полиэдры Клейна формулируются *только* для случая, когда симплициальный конус удовлетворяет одному из условий в (∗).

Если все грани конуса целые, то полиэдр Клейна является полиэдром в смысле нашего определения. В остальных случаях полиэдр Клейна не является полиэдром, а если не выполнены условия (∗), то его граница может быть не замкнутой, из одной вершины может исходить счетное число одномерных граней (ребер), и, как следствие, полиэдр Клейна не будет являться даже обобщенным полиэдром. В этих случаях трудно работать с границей полиэдра Клейна и говорить о ее локальных целочисленных инвариантах. В данной работе мы предлагаем модифицировать определение полиэдра Клейна, чтобы устранить этот недостаток.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Внутренним полиэдром Клейна* для полиэдра C называется множество

$$K_{\mathrm{int}}(C) = \operatorname{conv}((C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d),$$

где ∂C – граница C.

2.3. Формулировка основных результатов. Следующие две теоремы составляют основные результаты данной работы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть полиэдр C не содержит прямых и его асимптотический конус имеет непустую внутренность. Тогда его внутренний полиэдр Клейна $K_{\mathrm{int}}(C)$ замкнут.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть полиэдр C не содержит прямых и его внутренний полиэдр Клейна $K_{\mathrm{int}}(C)$ замкнут. Тогда $K_{\mathrm{int}}(C)$ является обобщенным полиэдром.*

Доказательства теорем 1, 2 используют результаты работы [17].

2.4. О связи между внутренним полиэдром Клейна и симплициальным конусом. Имеет место следующая теорема, устанавливающая соответствие между рассматриваемыми нами выпуклыми оболочками целых точек относительно полиэдров. Рассмотрим симплициальный конус C с вершиной в начале координат (тогда $C_{\text{as}}(C) = C$).

Теорема 3. *Пусть C – симплициальный конус, C удовлетворяет условию (∗) и имеет непустую внутренность. Тогда существуют полиэдры M и L, удовлетворяющие условию (∗), такие, что*

$$K(C) = K_{\mathfrak{M}}(M) = K_{\text{int}}(L).$$

Доказательство. Построим новые полиэдры L и M. Если все грани C с порождающим набором $((h_1, 0), \dots, (h_d, 0))$ не содержат ненулевых целых точек, то в порождающий набор для L добавим порождающий набор C. Если же все грани C целые, то существует $\delta > 0$, достаточно малое, чтобы все точки $C \cap \mathbb{Z}^d$ и только они лежали в полиэдре с порождающим набором $((h_1, -\delta), \dots, (h_d, -\delta))$. Его и добавим в порождающий набор для L.

Заметим, что в случае симплициального конуса с вершиной в начале координат множество $(C \setminus \partial C)$ не содержит прямых и не содержит точку $\{0\}$. Тогда существуют $h \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{gathered} C \cap \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} = (C \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) \geqslant \varepsilon\}) \cap \mathbb{Z}^d, \\ (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d = (C \setminus \partial C \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) \geqslant \varepsilon\}) \cap \mathbb{Z}^d. \end{gathered} \tag{2.4.1}$$

Добавим (h, ε) в порождающий набор для L, а порождающий набор M определим как такой же набор для C, но с дополнительной парой (h, ε).

Оказывается, что тогда выполнены следующие соотношения:

$$\begin{gathered} C = C_{\text{as}}(C) = C_{\text{as}}(M) = C_{\text{as}}(L), \\ K(C) = K_{\mathfrak{M}}(M) = K_{\text{int}}(L), \end{gathered} \tag{2.4.2}$$

и, следовательно, классический полиэдр Клейна для симплициального конуса с вершиной в начале координат как подмножество $\mathbb{R}^d$ совпадает с выпуклой оболочкой целых точек для полиэдра M, а также с внутренним полиэдром Клейна для L, а к ним уже применимы сформулированная выше теорема Муссафира и теоремы 1, 2 для внутреннего полиэдра Клейна с теми же самыми условиями на M и L, что и на C. При этом $K(C) = K_{\text{int}}(C)$, когда все грани конуса не содержат ненулевых целых точек (в частности, для почти всех конусов полиэдр Клейна и внутренний полиэдр Клейна совпадают как подмножества $\mathbb{R}^d$).

3. Свойства введенных понятий и общие теоремы

3.1. Свойства полиэдров и асимптотических конусов. *Минимальным представлением* для полиэдра C называется набор $\{h_1, c_1, \dots h_n, c_n\}$, $h_i \in \mathbb{R}^d$, $c_i \in \mathbb{R}$ такой, что он порождает C и существует такой набор точек $\{x_1, \dots, x_n\} \subset C$, что для всех $i = 1, \dots, n$ и для всех $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$, верны следующие соотношения:

$$(h_i, x_i) = c_i, \qquad (h_i, x_j) > c_i.$$

Такое представление для полиэдра с непустой внутренностью всегда существует.

Пусть C – выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$. Множество точек C, не принадлежащих внутренности никакого отрезка, лежащего в C, называется *экстремальным* для C и обозначается $\operatorname{ext}(C)$. Под $\langle u\rangle$ мы понимаем линейное пространство, натянутое на u. Множество векторов $u \in C_{\text{as}}(C)$, из представления которых в виде $u = u_1 + u_2$, $u_1, u_2 \in C_{\text{as}}(C)$, следует, что $u_1, u_2 \in \langle u\rangle$, называется множеством *асимптотических направлений* для C и обозначается $D_{\text{ext}}(C_{\text{as}}(C))$.

Известно следующее представление для полиэдра (см. [18]):

Лемма 1 (о представлении полиэдра). *Пусть C – выпуклый полиэдр, который не содержит прямых. Тогда верно представление*

$$C = \operatorname{conv}(x_1, \dots, x_r) + \operatorname{cone}\{u_1, \dots, u_s\},$$
$$\text{где} \quad \{x_i\} = \operatorname{ext}(C), \quad \{u_j\} = D_{\text{ext}}(C_{\text{as}}(C)).$$

Следующая лемма выявляет некоторые общие свойства C и $(C \setminus \partial C)$:

Лемма 2. *Если C – полиэдр, $\operatorname{int}(C_{\text{as}}(C)) \neq \varnothing$, то*

$$C_{\text{as}}(C) = C_{\text{as}}(C \setminus \partial C).$$

Очевидным является утверждение, что если аффинная гиперплоскость имеет ограниченное пересечение с C, то она имеет ограниченное пересечение и с $(C \setminus \partial C)$.

3.2. Теорема Каратеодори и ее применение.

Теорема 4 (Каратеодори). *Для $X \subseteq \mathbb{R}^d$ верны следующие утверждения*:

1) *если $x \in \operatorname{conv}(X)$, то существует набор из $d+1$ точек $\{x_1, \dots, x_{d+1}\} \subset X$ и набор чисел $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1} \geqslant 0\}$ такие, что*

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} x_i \lambda_i, \qquad \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1;$$

2) *если $u \in \operatorname{cone}(X)$, то существует набор из d точек $\{x_1, \dots, x_d\} \subset X$ и набор чисел $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d \geqslant 0\}$ такие, что*

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i \lambda_i, \qquad \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1.$$

С помощью данной теоремы мы получаем следствие о целочисленности множества экстремальных точек.

Лемма 3. *Пусть полиэдр C не содержит прямых. Тогда*

$$\operatorname{ext}(K_{\text{int}}(C)) \subset \mathbb{Z}^d.$$

Доказательство. По теореме Каратеодори

$$x = \sum_{i=1}^{r} z_i \lambda_i, \qquad \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad z_i \in (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d.$$

По определению $\operatorname{ext}(K_{\text{int}}(C))$ выполнено $r = 1$. Следовательно,

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{и} \qquad x \in (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d.$$

Также, с помощью теоремы Каратеодори очевидным образом можно переформулировать условие на отсутствие прямых в конусе:

Лемма 4. *Пусть задан конус* $U = \operatorname{cone}(\{u_i\}_{i=1}^q)$ *и* $u_i \neq 0$ *для любого* $i = 1, \ldots, q$. *Тогда*

$$U \text{ не содержит прямых} \iff 0 \notin \operatorname{conv}(\{u_i\}_{i=1}^q).$$

3.3. Теорема Кронекера и ее применение. Пусть $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$. Пересечение всех целых подпространств $\mathbb{R}^d$, содержащих $\mathbf{u}$, называется *целым аппроксимирующим пространством* для $\mathbf{u}$ и обозначается через R_u.

Под $\langle u \rangle^+$ и $\langle u \rangle^-$ мы понимаем соответственно $\operatorname{cone}(+u)$ и $\operatorname{cone}(-u)$.

Теорема 5 (Кронекер). *Пусть* $u \in \mathbb{R}^d$. *Тогда верны следующие утверждения*:

1) $(R_u \cap \mathbb{Z}^d) + \langle u \rangle$ *плотно в* R_u;
2) *для любых* $x \in R_u$, $\varepsilon > 0$ *в множестве* $B(x, \varepsilon) + \langle u \rangle^+$ *лежит бесконечно много целых точек.*

Лемма 5. *Пусть* $u \in \mathbb{R}^d$ *и*

$$H = \{y \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) = (h, y), \text{ где } x \in \mathbb{Z}^d\}$$

– *гиперплоскость, содержащая* $\mathbf{u}$. *И пусть* $R_u \nsubseteq H$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *в множестве*

$$\{y \mid y \in (B(x, \varepsilon) + \langle u \rangle^+),\ (h, x) > (h, y)\}$$

содержится бесконечно много целых точек.

Замечание 3.1. Очевидно, что во втором пункте теоремы Кронекера можно равнозначно заменить $\langle u \rangle^+$ на $\langle u \rangle^-$. Такую же замену можно провести и в лемме 5, заменяя $\langle u \rangle^+$ на $\langle u \rangle^-$ или изменяя знак строгого неравенства $(h, x) > (h, y)$ на $(h, x) < (h, y)$. Таким образом можно получить еще 3 эквивалентных утверждения.

При помощи лемм 3, 5 легко получить идентичность асимптотических конусов:

Лемма 6. *Пусть* C – *полиэдр и* $\operatorname{int}(C_{\text{as}}(C)) \neq \varnothing$. *Тогда*

$$C_{\text{as}}(C) = C_{\text{as}}(\operatorname{conv}(C \cap \mathbb{Z}^d)) = C_{\text{as}}(\operatorname{conv}((C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d)).$$

Под H^-, где $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) = h_0\}$ – аффинная гиперплоскость, мы понимаем полупространство $\{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) \leqslant h_0\}$.

Используя представление полиэдра C из леммы 1 и результаты лемм 2 и 6, мы будем рассматривать общий асимптотический конус для C и $K_{\text{int}}(C)$.

3.4. Леммы Муссафира. Следующие утверждения взяты из работы Муссафира [17]. Многие из них были известны задолго до выхода [17], взятой в качестве основного источника.

Лемма 7 [17]. *Пусть* C – *замкнутое, выпуклое подмножество* $\mathbb{R}^d$. *Если последовательность* $\{x_n\}_{n \geqslant 0} \subset C$ *неограниченная, то можно выделить подпоследовательность* $\{x_{n_i}\}_{i \geqslant 0} \subset C$ *так, что последовательность* $\{x_{n_i}/\|x_{n_i}\|\}_{i \geqslant 0}$ *сходится к некоторому* $\mathbf{u} \in C_{\text{as}}(C)$.

Лемма 7 является фундаментальной для доказательства следующей леммы в [17].

Лемма 8 [17]. *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^d$ – замкнутые выпуклые множества со следующими свойствами*:

$$\begin{cases} \forall a \in A\ \forall \beta \in C_{\mathrm{as}}(B)\ \exists t \in \mathbb{R}_+ : \quad a + t\beta \in A \cup B, \\ \forall b \in B\ \forall \alpha \in C_{\mathrm{as}}(A)\ \exists t \in \mathbb{R}_+ : \quad b + t\alpha \in A \cup B, \\ C_{\mathrm{as}}(A) \cup C_{\mathrm{as}}(B) \text{ не содержит прямых.} \end{cases}$$

Тогда $\operatorname{conv}(A \cup B)$ *– замкнутое множество.*

Лемма 9 [17]. *Пусть C – полиэдр, не содержащий прямых. Если $C_{\mathrm{as}}(C)$ содержится в целом линейном подпространстве L, то существует лишь конечное число целых аффинных подпространств размерности* $\dim L$, *параллельных L и пересекающих C.*

Лемма 10 [17]. *Пусть C – полиэдр, не содержащий прямых,*

$$C_{\mathrm{as}}(C) = \operatorname{cone}(\{u_i\}_{i=1}^q), \qquad x_0 \in C, \quad H_{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) = (h, x_0)\}.$$

Тогда

$$H_{x_0} \cap C \text{ неограничено} \iff \exists i, j, \quad i \neq j, \quad \text{такие, что} \quad (h, u_i) > 0,\ (h, u_j) < 0.$$

Лемма 11 [17]. *Пусть C – полиэдр, не содержащий прямых, и пусть* $C_{\mathrm{as}}(C) = \operatorname{cone}(\{u_i\}_{i=1}^q)$. *Тогда существует $h \in \mathbb{R}^d$ такой, что*

$$(h, u_i) > 0 \qquad \text{для всех} \quad i = 1, \dots, q.$$

Лемма 12 [17]. *Пусть C – полиэдр, не содержащий прямых. Пусть*

$$C_{\mathrm{as}}(C) = \operatorname{cone}(\{u_i\}_{i=1}^q) \qquad \text{и} \qquad \operatorname{int}(C_{\mathrm{as}}(C)) \neq \varnothing.$$

Пусть

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) = h_0\}$$

– аффинная гиперплоскость, причем все целые точки C лежат по одну сторону относительно H. Тогда существует $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ такое, что для всех $i = 1, \dots, q$ верно следующее: $\varepsilon(h, u_i) \geqslant 0$.

Лемма 13 [17]. *Пусть C – полиэдр, не содержащий прямых. Пусть $h_0 \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^d$ и $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) = h_0\}$ – аффинная гиперплоскость такая, что все целые точки C лежат по одну сторону относительно H. Тогда*

$$\operatorname{conv}(H \cap C \cap \mathbb{Z}^d) = H \cap \operatorname{conv}(C \cap \mathbb{Z}^d).$$

4. Вспомогательные утверждения

Лемма 14 (о существовании гиперплоскости с ограниченным пересечением). *Пусть C – полиэдр, не содержащий прямых и* $C_{\mathrm{as}}(C) = \operatorname{cone}(\{u_i\}_{i=1}^q)$. *Если $x_0 \in C \setminus K_{\mathrm{int}}(C)$ и $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) = h_0\}$ – аффинная гиперплоскость, отделяющая x_0 от $K_{\mathrm{int}}(C)$, причем $H \cap (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d = \varnothing$, то существует аффинная гиперплоскость G, отделяющая x_0 от $K_{\mathrm{int}}(C)$ и имеющая ограниченное пересечение с C.*

Доказательство. По лемме 12 $(h, u_i) \geqslant 0$. Так как C не содержит прямых, то по лемме 11 существует гиперплоскость

$$G_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (g_0, x) = \varepsilon_0)\}$$

такая, что $(g_0, u_i) > 0$, и по лемме 10 пересечение любой другой аффинной гиперплоскости, параллельной ей, с C ограничено или пусто. Для $\varepsilon > 0$ положим $g_\varepsilon = h + \varepsilon g_0$ и определим семейство аффинных гиперплоскостей

$$G_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (g_\varepsilon, x) = (g_\varepsilon, x_0)\}$$

такое, что $(g_\varepsilon, u_i) > 0$, а значит, $G_\varepsilon \cap C$ ограничено и компактно. Следовательно, число целых точек, лежащих в полупространстве G_ε^-, конечно; обозначим их

$$\{x_i\}_{i=1}^p \subseteq G_\varepsilon^- \cap \mathbb{Z}^d.$$

При этом $(h, x_i) > 0$, и для каждого i существует свое ε_i такое, что $(g_{\varepsilon_i}, x_i) \geqslant (g_{\varepsilon_i}, x_0)$. Положим $\varepsilon = \min(\{\varepsilon_i\}_{i=1}^p)$, тогда

$$(g_\varepsilon, x) \geqslant (g_\varepsilon, x_0) \qquad \forall x \in (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d.$$

Построенная таким образом аффинная гиперплоскость G_ε имеет ограниченное пересечение с C и отделяет x_0 от $K_{\text{int}}(C)$.

Лемма 15 (об открытости дополнения для $K_{\text{int}}(C)$ в ограниченном случае). *Пусть C – полиэдр, не содержащий прямых и $C_{\text{as}}(C) = \text{cone}(\{u_i\}_{i=1}^q)$. Если $x_0 \in C \setminus K_{\text{int}}(C)$ и $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) = h_0\}$ – аффинная гиперплоскость, отделяющая x_0 от $K_{\text{int}}(C)$, причем $H \cap C$ ограничено, тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$B(x_0, \varepsilon) \cap K_{\text{int}}(C) = \varnothing.$$

Доказательство. Из условия на C и H следует, что $\text{conv}(H \cap (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d)$ ограничено и является политопом. Следовательно, это множество замкнуто.

Если H строго отделяет $K_{\text{int}}(C)$ от x_0, то все доказано.

Пусть теперь

$$(h, x) \geqslant (h, x_0), \qquad x \in (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d.$$

Поскольку множество

$$\{(h, x_0) + \delta \geqslant (h, x) \geqslant (h, x_0)\}, \qquad \delta > 0,$$

ограничено и содержит конечное число целых точек, то существует $\varepsilon > 0$ и полупространство

$$H_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) \geqslant (h, x_0) + \varepsilon\}$$

такое, что

$$C \cap \mathbb{Z}^d = (C \cap \mathbb{Z}^d \cap H) \cup (C \cap \mathbb{Z}^d \cap H_\varepsilon).$$

При этом

$$K_{\text{int}}(C) \subset \text{conv}(K_{\text{int}}(C) \cap H, C \cap H_\varepsilon)$$

(заведомо выполнено для выпуклой оболочки целых точек внутри C). Множества $K_{\text{int}}(C) \cap H$, $C \cap H_\varepsilon$ удовлетворяют условиям леммы 8, и следовательно, $K_{\text{int}}(C)$ вложено в замкнутое множество, в котором не содержится x_0.

Лемма 16 (об аппроксимирующих пространствах для экстремальных направлений). *Пусть C – полиэдр, не содержащий прямых. Пусть*

$$C_{\text{as}}(C) = \operatorname{cone}(\{u_i\}_{i=1}^{q}) \qquad u \qquad \operatorname{int}(C_{\text{as}}(C)) \neq \varnothing.$$

Пусть $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) = h_0\}$ – аффинная гиперплоскость, причем все точки $x \in C \cap \mathbb{Z}^d$ удовлетворяют условию $(h, x) \geqslant h_0$. Пусть $H \cap \operatorname{int} C$ содержит целую точку u $(h, u_i) = 0$. Тогда

$$R_{u_i} \subseteq \ker h = \{x \mid (h, x) = 0\}.$$

Доказательство. Как уже было доказано в лемме 12, все $(h, u_i) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, q$. Пусть $x_0 \in (C \setminus \partial C) \cap H$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что шар $B(x_0, \varepsilon) \subseteq C \setminus \partial C$ и множество

$$D_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon) + \langle u_i \rangle^+ \subseteq C \setminus \partial C.$$

Если

$$R_{u_i} \nsubseteq \ker h = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) = 0\},$$

то по лемме 5 получим, что есть целые точки, лежащие по обе стороны относительно H. Получаем противоречие.

Лемма 17 (об отделимости в случае неограниченного пересечения). *Пусть C – выпуклый полиэдр, не содержащий прямых. Пусть*

$$C_{\text{as}}(C) = \operatorname{cone}(\{u_i\}_{i=1}^{q}) \qquad u \qquad \operatorname{int}(C_{\text{as}}(C)) \neq \varnothing.$$

Пусть $x_0 \in C \setminus K_{\text{int}}(C)$ и $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) = (h, x_0)\}$ – аффинная гиперплоскость, отделяющая x_0 от $K_{\text{int}}(C)$. Тогда

$$\inf_{x \in (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d \setminus H} (h, x) > (h, x_0).$$

Доказательство. По лемме 12

$$(h, u_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, j, \qquad (h, u_i) > 0, \quad i = j+1, \ldots, q.$$

По лемме 16

$$R_{u_i} \subseteq \ker h, \quad i = 1, \ldots, j, \qquad \langle u_1, \ldots, u_i \rangle \subseteq \bigoplus_{i=1}^{j} R_{u_i} = L \subseteq \ker h.$$

Рассмотрим

$$H_\delta = (C \setminus \partial C) \cap \{(h, x_0) \leqslant h \leqslant (h, x_0) + \delta\},$$

$C_{\text{as}}(H_\delta) = \operatorname{cone}(\{u_i\}_{i=1}^{j}) \subseteq L$. Отсюда по лемме 9 следует, что существует лишь конечное число *целых* аффинных подпространств, параллельных L и пересекающих H_δ. Из $L \subseteq \ker h$ получаем, что значение h на них постоянно и

$$\inf_{x \in H_\delta \cap \mathbb{Z}^d \setminus H} (h, x) > (h, x_0).$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Лемма 18 (о выделении подпоследовательности). *Пусть C – полиэдр, записанный в минимальном представлении*:

$$C = \bigcap_{i=1}^{p} \{h_i \geqslant c_i\}.$$

Пусть $x \in \operatorname{int} C$, $\{z_n\}_{n\geqslant 0}$ – неограниченная последовательность в $C \setminus \partial C$. Тогда существует подпоследовательность $\{z_{n_j}\}_{j\geqslant 0}$, $z_{n_k} \neq z_{n_j} \neq x$, со следующим свойством:

$$(h_i, x) + (h_i, z_{n_j} - z_{n_0}) > c_i.$$

Доказательство. Имеем $(h_i, x) > c_i$, $(h_i, z_n) > c_i$. Если для некоторого i последовательность (h_i, z_n) неограничена, то можно выделить подпоследовательность $\{z_{n_j}\}$ так, что $\lim_{j\to\infty}(h_i, z_{n_j}) = +\infty$ и при $j \geqslant n_i$ выполнено

$$(h_i, x) + (h_i, z_{n_j} - z_{n_{n_i}}) > c_i.$$

Пусть для некоторого i последовательность (h_i, z_n) ограничена, тогда можно выделить подпоследовательность $\{z_{n_j}\}_{j\geqslant 0}$ так, что (h_i, z_n) монотонна и имеет предел. Если она возрастает, то случай рассматривается аналогично случаю неограниченной последовательности. Если она убывает, то при $j \geqslant n_i$ выполнено

$$(h_i, x) + (h_i, z_{n_j} - z_{n_{n_i}}) > c_i$$

за счет малости второго слагаемого в левой части неравенства.

При $n = \max(\{n_i\}_{i=1}^{p})$ получаем требуемое утверждение.

Лемма 19 (о конечном числе одномерных граней $K_{\text{int}}(C)$). *Пусть C – полиэдр в $\mathbb{R}^d$, $x \in \operatorname{ext}(K_{\text{int}}(C))$. Тогда существует лишь конечное число одномерных граней $K_{\text{int}}(C)$, исходящих из x.*

Доказательство. Число неограниченных одномерных граней не превосходит q, так как неограниченные одномерные грани должны быть параллельны асимптотическим направляющим для асимптотического конуса C.

Предположим, что существует бесконечно много одномерных ограниченных граней $[x, z_n]$, $z_n \subseteq \operatorname{ext}(K_{\text{int}}(C))$, $n \geqslant 0$ (по лемме 3), при этом последовательность $\{z_n\}_{n\geqslant 0} \in (C \cap \mathbb{Z}^d)$ и не ограничена, так как любое ограниченное в $\mathbb{R}^d$ множество содержит только конечное число целых точек. По лемме 18 можно выделить подпоследовательность

$$\{z_{n_j}\}_{j\geqslant 0}, \qquad z_{n_k} \neq z_{n_j} \neq x, \quad (h_i, x) + (h_i, z_{n_j} - z_{n_0}) > c_i.$$

Рассмотрим параллелограмм $\operatorname{conv}(x, z_{n_0}, z_{n_j}, x + (z_{n_j} - z_{n_0},))$. Его вершины принадлежат $(C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d$, не лежат на одной прямой и различны, следовательно, его диагональ $[x, z_{n_j}]$ не является одномерной гранью $K_{\text{int}}(C)$. Противоречие.

5. Доказательство основных теорем 1, 2

Доказательство теоремы 1. Построим $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) = h_0\}$ – аффинную гиперплоскость, отделяющую x_0 от $K_{\text{int}}(C)$. Если H строго отделяет $K_{\text{int}}(C)$ от x_0, то все доказано.

Если в пересечении $H \cap (C \setminus \partial C)$ нет целых точек, то мы применяем лемму 14 о существовании гиперплоскости с ограниченным пересечением и переходим к случаю с ограниченным пересечением. Если $H \cap C$ ограничено, то по лемме 15 об открытости дополнения для $K_{\mathrm{int}}(C)$ в ограниченном случае x_0 отделим от $K_{\mathrm{int}}(C)$.

Остается случай, когда пересечение $(H \cap (C \setminus \partial C)) \ni x$ не ограничено и содержит хотя бы одну целую точку. Пусть $H = \{y \in \mathbb{R}^d \mid (h, y) = (h, x)\}$, причем все целые точки $H \cap (C \setminus \partial C)$ лежат внутри C и их множество не пусто. Тогда по лемме 17 об отделимости в случае неограниченного пересечения

$$K_{\mathrm{int}}(C) \subseteq \operatorname{conv}\bigl(\overline{\operatorname{conv}(H \cap (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d)}, \{y \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) + \varepsilon \leqslant (h, y)\} \cap C\bigr).$$

Этот случай доказывается индукцией по размерности. По предположению индукции и лемме 13 $\operatorname{conv}(H \cap (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d)$ замкнуто,

$$x \in \overline{\operatorname{conv}(H \cap (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d)}, \qquad x \notin \operatorname{conv}(H \cap (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d) = K_{\mathrm{int}}(C) \cap H.$$

Множества

$$\operatorname{conv}(H \cap (C \setminus \partial C) \cap \mathbb{Z}^d), \qquad (\{y \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) + \varepsilon \leqslant (h, y)\} \cap C)$$

удовлетворяют условиям леммы 8, и следовательно, $K_{\mathrm{int}}(C)$ вложено в замкнутое множество, в котором не содержится x. Объединяя все случаи для всех $x_0 \in (C \setminus \partial C) \setminus K_{\mathrm{int}}(C)$, получаем, что $K_{\mathrm{int}}(C)$ замкнуто.

Доказательство теоремы 2. Пусть пересечение C с $H^- = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) \leqslant c\}$ ограниченно. Рассмотрим множество $K_{\mathrm{int}}(C) \cap H^-$. Оно компактно, так как его вершины – это точки $\operatorname{ext}(K_{\mathrm{int}}(C))$ или пересечения одномерных граней $K_{\mathrm{int}}(C)$ с H; при этом $K_{\mathrm{int}}(C)$ замкнуто. Принимая во внимание лемму 19, получаем, что число экстремальных точек $K_{\mathrm{int}}(C) \cap H^-$ конечно и это множество является политопом – компактным полиэдром. Поскольку для P – компактного полиэдра – верно $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) \leqslant c\}$ для некоторого c, то

$$P \cap K_{\mathrm{int}}(C) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (h, x) \leqslant c\} \cap K_{\mathrm{int}}(C) \cap P,$$

а последнее множество является пересечением двух компактных полиэдров, т.е. само является компактным полиэдром.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] P. Erdös, P. M. Gruber, J. Hammer, *Lattice Points*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **39**, Longman Sci. & Tech., Harlow, 1989.

[2] O. Perron, "Grundlagen für eine Theorie des Jacobische Kettenbruchalgoritmus", *Math. Ann.*, **64** (1907), 1–76.

[3] Д. И. Боднар, *Ветвящиеся цепные дроби*, Наукова Думка, Киев, 1986.

[4] F. Klein, "Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung", *Gött. Nachr.*, **3** (1895), 357–359.

[5] V. I. Arnol'd, "A-graded algebras and continued fractions", *Comm. Pure Appl. Math.*, **42**:7 (1989), 993–1000.

[6] А. Д. Брюно, В. И. Парусников, "Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта", *Матем. заметки*, **56**:4 (1994), 9–27.

[7] Ж.-О. Муссафир, “Паруса и базисы Гильберта”, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:2 (2000), 43–49.

[8] О. Н. Герман, “Паруса и базисы Гильберта”, *Дискретная геометрия и геометрия чисел*, Тр. МИАН, **239**, Наука, М., 2002, 98–105.

[9] О. Н. Герман, “Паруса и норменные минимумы решеток”, *Матем. сб.*, **196**:3 (2005), 31–60.

[10] О. Н. Герман, “Полиэдры Клейна и относительные минимумы решеток”, *Матем. заметки*, **79**:4 (2006), 546–552.

[11] O. N. German, “Klein polyhedra and lattices with positive norm minima”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **19**:1 (2007), 175–190.

[12] О. Н. Герман, Е. Л. Лакштанов, “О многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:1 (2008), 51–66.

[13] M. L. Kontsevich, Yu. M. Suhov, “Statistics of Klein polyhedra and multidimensional continued fractions”, *Pseudoperiodic Topology*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **197**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 9–27.

[14] А. А. Илларионов, Д. А. Слинкин, “О количестве вершин многогранников Клейна целочисленных решеток в среднем”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 48–55.

[15] А. А. Илларионов, “О статистических свойствах многогранников Клейна трехмерных целочисленных решеток”, *Матем. сб.*, **204**:6 (2013), 23–46.

[16] S. S. Dey, D. A. Morán R., *Some Properties of Convex Hulls of Integer Points Contained in General Convex Sets*, Preprint, 2011.

[17] J.-O. Moussafir, “Convex hulls of integral points”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. V*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **266**, ПОМИ, СПб., 2000, 188–217.

[18] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, New York, 1995.

И. А. Макаров
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Москва,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: iamakarov@hse.ru, revan1986@mail.ru

Поступило
01.11.2012
Исправленный вариант
03.10.2013