

区間 0-1 計画問題と製品選択

石淵久生 田中英夫
大阪府立大学

(受理 1988 年 5 月 30 日; 再受理 1988 年 10 月 18 日)

和文概要 近年、あいまいな状況における意思決定の方法として、多くのファジィ数理計画の手法が提案されている。ファジィ数理計画問題は、通常の数理計画問題の係数をファジィ数の係数に置き換えた問題となっているが、ファジィ係数に対する適切なメンバーシップ関数を与えることが簡単でない場合も多い。そこで本研究では、係数の持つあいまいさを区間と考えることにより、取り扱いの容易な区間計画問題を定式化する。区間計画問題として、本研究では特に、あいまいな状況での製品選択問題を取り扱うため、区間目標関数を持つ区間 0-1 計画問題を定式化する。まず、この問題の解集合を定義するため、区間の左端と右端および区間の幅と中心を用いて区間に対する 2 つの順序関係を定義する。区間 0-1 計画問題の解集合は、この 2 つの順序関係に基づく極大元集合により定義される。次に、この解集合を求めるため、分枝限定法を用いた解法アルゴリズムを提案する。最後に、選択の対象となる製品の需要量が区間として予測される場合での製品選択問題を、提案した手法を用いて解析する。

1. 緒 言

あいまいな状況での意思決定の方法として、ファジィ数理計画法が提案されている。ファジィ数理計画法については、例えば Negoita〔8〕, Slowinski〔12〕等により、多くの手法の紹介がなされている。ファジィ数理計画問題では、制約条件や目標関数がファジィ制約やファジィ目標として与えられるが、このような制約条件や目標関数に対して適切なメンバーシップ関数を与えるのは簡単ではなく、実際の問題に応用することが困難な場合も多い。そこで本研究では、数理計画問題の係数の持つあいまいさを区間として表現することにより、現実の問題への適応が容易な区間計画問題の定式化とその解析を行なう。区間計画問題として、本研究では特に、選択の対象となる製品の需要量が区間予測される場合での製品選択問題を取り扱うことを目標に、区間目標関数を持つ 0-1 計画問題を定式化し、その解析を行なう。

まず 2 章において、区間演算および区間の間での順序関係を定義する。この順序関係は、最大化問題と最小化問題に対し、それぞれ区間の左端と右端および区間の中心と幅により定義される。最大化問題に対する順序関係は、区間として与えられる利得の間での選好を表現するものであり、最小化問題に対する順序関係は、区間として与えられる損失の間での選好を表現するものである。次に 3 章で、区間 0-1 計画問題を定式化し、その解析を行う。この問題は、目標関数の値が区間として与えられるという点で通常の数理計画問題とは異なるものであり、2 章で定義した区間に対する順序関係によ

りその解集合が定義される。最後に 4 章において、提案した手法を製品選択問題に応用する。

製品選択問題に対しては、個別生産型企业における受注選択に関する研究が多く行われている。最も簡単な受注選択問題は、0-1 型ナップサック問題として定式化され、この種の組合せ問題に対しては、効率的な解法についての研究が行われている（例えば、茨木〔4〕）。また、千住・伏見〔11〕は、残業を行う場合や設備の取り替えを行う場合など、様々な状況での受注選択の方法について研究を行っている。さらに生産に要する時間や費用が生産条件により変化する場合については、人見〔3〕により受注選択と生産条件の決定を同時に行う方法が提案されている。

このような受注選択の問題は、基本的には個別生産を行っている企業での受注選択を対象としたものであり、製品選択の対象となる製品の生産量や製品選択の結果得られる利潤は明確に与えられているとの条件で解析を行っている。

しかし、海外企業に部品を納入するような場合、ドル契約での受注であれば円ベースでの収入は為替レートにより変動し、受注選択の結果得られる利潤が確定的であるとは考えにくい。また、自動車や家電製品など消費財の部品の受注選択では、受注量も確定的ではない。実際、自動車の生産は、マイナーチェンジを除けば約 4 年間は同一モデルが生産され、その部品の受注を行うことは、少なくとも 4 年間は継続的に部品の納入を行なうことを意味する。しかし、トヨタ・システムに代表されるように、生産システムは無在庫生産に向かっており、部品企業への確定納入量の発注が前日に行われるということもめずらしくない。このような場合では、部品企業が受注選択を行うときには、生産量は概数として与えられているだけであり、確定的ではない。また、見込み生産型の企業では、あいまいな需要予測に基づき製品ラインに関する意思決定を行わなければならない。

そこで本研究では、採択した製品の生産量は需要量により変動し確定的ではないと考え、製品 1 は 1,000 個から 1,200 個、製品 2 は 2,500 個から 3,000 個といった区間で需要量が予測されるとする。そして、このような区間予測に基づく製品選択問題を区間 0-1 計画問題として定式化し、提案した手法によりその解析を行なう。本研究で提案した区間 0-1 計画問題に基づく製品選択モデルは、需要量のみならず製品価格や生産費用があいまいである場合にも適応可能なモデルである。

2. 区間演算と区間に対する順序

2.1 区間演算

本論文を通じて、実数を小文字 $a, b, \dots, z$ で、実軸上の閉区間を大文字 $A, B, \dots, Z$ で表わすことにする。

一般に閉区間 A は、その左端 a_L (下限値) と右端 a_R (上限値) を用いて、次のように表現される。

$$A = [a_L, a_R] = \{t \mid a_L \leq t \leq a_R\} \quad (1)$$

また、同じ区間をその中心 a_c と幅 a_w を用いて、次のように表現する。

$$A = \langle a_c, a_w \rangle = \{t \mid a_c - a_w \leq t \leq a_c + a_w\} \quad (2)$$

ただし、区間の中心 a_c と幅 a_w は、その左端 a_L と右端 a_R を用いて次のように定義されている。

$$a_c = (a_L + a_R) / 2 \quad (3)$$

$$a_w = (a_R - a_L) / 2 \quad (4)$$

ここで、区間に対する四則演算を次のように定義する。

〔定義 1〕

区間に対する演算 $*$ を、 $* \in \{+, -, \times, \div\}$ とする。このとき、 $A * B$ を次のように定義する。ただし、 $*$ が割算を表わすときには、区間 B に 0 は含まれないものとする。

$$A * B = \{t \mid t = a * b, a \in A, b \in B\} \quad (5)$$

つまり、区間演算は区間に含まれる実数により定義される。また、実数は右端と左端が等しい幅が 0 の区間と考えることができるので、上の定義は実数と実数との演算および実数と区間との演算の定義を含むものである。

2.2 最大化問題に対する順序関係

いま、二つの代替案 a, b が意思決定者に与えられており、それぞれの代替案を選択したときの利得が区間 A, B で与えられているとする。意思決定者の得る利得は、確かに区間 A, B に含まれるが、そのなかのどの値になるかについては全く無知であるとする。

まず、区間に対する順序 $\leq_{LR}$ を次のように定義する。

〔定義 2〕

区間 A, B をそれぞれ、 $A = [a_L, a_R]$, $B = [b_L, b_R]$ とする。このとき、区間に対する順序 $\leq_{LR}$ を次のように定義する。

$$A \leq_{LR} B \Leftrightarrow a_L \leq b_L, a_R \leq b_R \quad (6)$$

また $A \neq B$ かつ $A \leq_{LR} B$ であることを $A <_{LR} B$ と表わすことにする。

このように、区間に対する順序 $\leq_{LR}$ は区間の左端と右端により定義される。例えば、利得の区間 A, B が $A = [100, 150]$, $B = [140, 180]$ であれば、 $A \leq_{LR} B$ となり、これは我々の直観的な選好と一致する。また、 $A \leq_{LR} B$ であればその中心の間に $a_c \leq b_c$ の関係が成り立ち、区間の中心をその期待値と考えたときの選好とも矛盾しない。さらに、区間 A, B の幅が 0 のとき、つまり A, B が実数のときは、実数の大小を表わす通常の順序 $\leq$ ととも一致する。

しかし、順序 $\leq_{LR}$ は、明らかに全順序ではなく、比較不可能な区間の組が無数に存在する。例えば、 $A = [100, 150]$, $B = [135, 145]$ などである。この 2 つの区間は、順序 $\leq_{LR}$ では比較不可能であるが、最悪の場合に得られる利得は B のほうが大きく、区間の期待値と考えることのできる中心も B のほうが大きい。

このような 2 つの区間では、通常は区間 B が選好される。そこで、次のような順序 $\leq_{cw}$ を定義する。

〔定義 3〕

区間 A, B をそれぞれ、 $A = \langle a_c, a_w \rangle$, $B = \langle b_c, b_w \rangle$ とする。このとき、区間に対する順序 $\leq_{cw}$ を次のように定義する。

$$A \leq_{cw} B \Leftrightarrow a_c \leq b_c, a_w \leq b_w \quad (7)$$

また、 $A \neq B$ かつ $A \leq_{cw} B$ であることを $A <_{cw} B$ と表わすことにする。

順序 $\leq_{cw}$ は、区間の中心と幅で定義される。これは、区間の中心は区間の期待値、区間の幅はそのあいまいさ、あるいはリスクと考えられ、期待値が大きくそのあいまいさが小さい代替案が選好されることに対応している。順序 $\leq_{cw}$ も、 A, B が実数のときには、実数の大小を表わす通常の順序 $\leq$ と一致する。

このように定義された区間に対する2つの順序は、互いに矛盾することはない。つまり、次の定理が成り立つ。

〔定理 1〕

2つの閉区間 A, B が与えられたとき、 $A \leq_{LR} B$ かつ $B \leq_{cw} A$ となる必要十分条件は、 $A = B$ である。

(証明)

(1) $A = B$ のとき、 $A \leq_{LR} B, B \leq_{cw} A$ となるのは、定義 2, 3 より明らかである。

(2) $A \leq_{LR} B$ かつ $B \leq_{cw} A$ のとき、 $A = B$ が成り立つことを示す。

$A \leq_{LR} B$ の定義より $a_L \leq b_L$ であるので、次の関係が成り立つ。

$$a_L = a_c - a_w \leq b_c - b_w = b_L \quad (8)$$

また、 $B \leq_{cw} A$ の定義より、次の関係が成り立つ。

$$a_c \geq b_c, a_w \leq b_w \quad (9)$$

式(9)を用いて式(8)を変形すると、次のようになる。

$$a_c - a_w \leq b_c - b_w \leq a_c - b_w \leq a_c - a_w \quad (10)$$

従って、 $a_c - a_w = b_c - b_w$ となる。これは、区間 A, B の左端が等しいことを示している。

また、同様にして区間 A, B の右端が等しいこと、つまり $a_c + a_w = b_c + b_w$ を示すことができる。

以上で、 $A \leq_{LR} B$ かつ $B \leq_{cw} A$ のとき、 $A = B$ が成り立つことが示された。(証明終り)

この定理により、二つの順序が矛盾しないこと、すなわち、 $A \neq B$ のときは $A \leq_{LR} B$ かつ $B \leq_{cw} A$ とはならないことがわかる。

このように定義された2つの順序 $\leq_{LR}, \leq_{cw}$ の説明のため、図1にいくつかの例を示す。この図からもわかるように、2つの順序は共に全順序ではなく、比較できない区間の組が無数に存在する。

次に、これまでに定義した二つの順序 $\leq_{LR}, \leq_{cw}$ が区間の左端と中心で定義された第三の順序 $\leq_{LC}$ により表現されることを示す。

〔定義 4〕

区間 A と B との間の順序 $\leq_{LC}$ を次のように定義する。

$$A \leq_{LC} B \Leftrightarrow a_L \leq b_L, a_c \leq b_c \quad (11)$$

また、 $A \neq B$ かつ $A \leq_{LC} B$ であることを $A <_{LC} B$ と表わすことにする。

この順序と最初に定義した二つの順序の間の関係は、次のようになる。

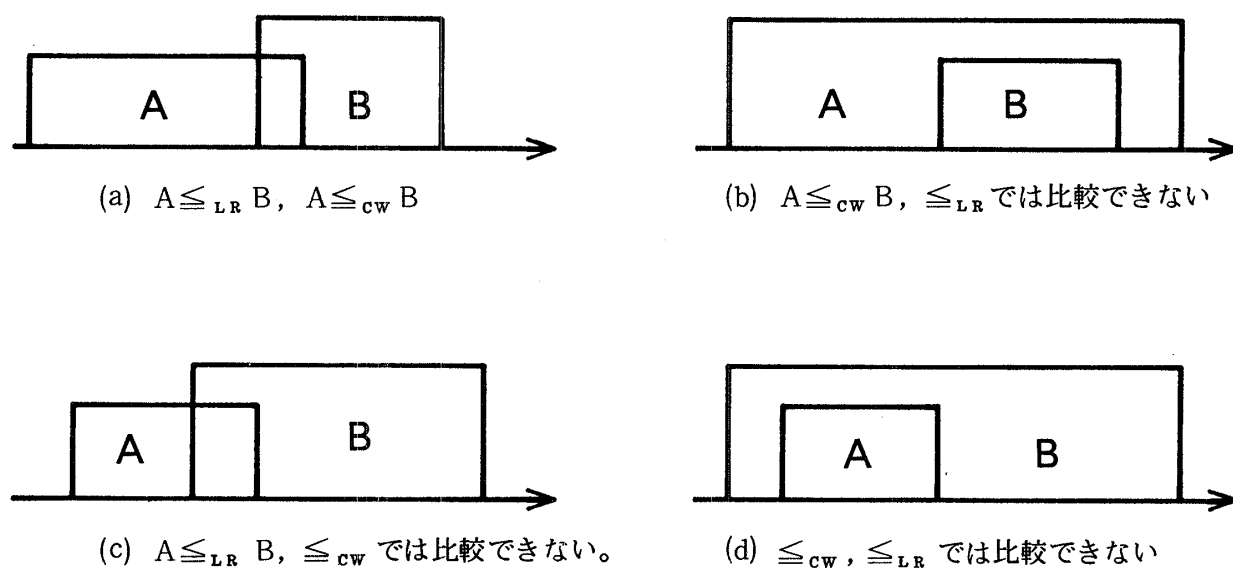


図1 区間に対する順序の例

〔定理2〕

区間に対する三つの順序 $\leq_{LR}$, $\leq_{CW}$, $\leq_{LC}$ の間に, 次の関係が成り立つ。

$$A \leq_{LR} B \text{ or } A \leq_{CW} B \Leftrightarrow A \leq_{LC} B \quad (12)$$

(証明)

(1) $A \leq_{LR} B$ のとき $A \leq_{LC} B$ となることを示す。

$A \leq_{LR} B$ の定義より, 次の関係が成り立つ。

$$a_L \leq b_L, a_R \leq b_R \quad (13)$$

また, 式(13)より,

$$a_C = (a_L + a_R) / 2 \leq (b_L + b_R) / 2 = b_C \quad (14)$$

となり, $A \leq_{LC} B$ が成り立つ。

(2) $A \leq_{CW} B$ のとき $A \leq_{LC} B$ となることを示す。

$A \leq_{CW} B$ の定義より, 次の関係が成り立つ。

$$a_C \leq b_C, a_W \geq b_W \quad (15)$$

また, 式(15)より,

$$a_L = a_C - a_W \leq b_C - b_W = b_L \quad (16)$$

となり, $A \leq_{LC} B$ が成り立つ。

(3) $A \leq_{LC} B$ のとき, $A \leq_{LR} B$ または $A \leq_{CW} B$ が成り立つことを示す。

$A \leq_{LC} B$ の定義より, 次の関係が成り立つ。

$$a_L \leq b_L, a_C \leq b_C \quad (17)$$

いま, $a_w \leq b_w$ が成り立っていると仮定すると,

$$a_R = a_L + 2a_w \leq b_L + 2b_w = b_R \quad (18)$$

となり, $A \leq_{LR} B$ が成り立つ。一方, $a_w \geq b_w$ が成り立っていると仮定すると, 式(17)より, $A \leq_{CW} B$ が成り立つ。したがって, $A \leq_{LC} B$ ならば, $A \leq_{LR} B$ または $A \leq_{CW} B$ が成り立つ。(証明終り)

2.3 最小化問題に対する順序関係

前節では, 区間として与えられる利得の間での選好を表わす順序関係を定義した。ここでは, 区間として与えられる損失の間での選好を表わす順序関係を定義する。

いま, 二つの代替案 a, b を選択したときの損失がそれぞれ区間 A, B で与えられているとする。まず, 区間に対する順序 $\leq_{*LR}$ を次のように定義する。

〔定義 5〕

区間 A, B の間の順序 $A \leq_{*LR} B$ を次のように定義する。

$$A \leq_{*LR} B \Leftrightarrow a_L \leq b_L, a_R \leq b_R \quad (19)$$

この定義は, 前節の順序 $\leq_{LR}$ の定義と同じものであり, 最小損失および最大損失が共に小さい方が選好されることを表わしている。

次に, 順序 $\leq_{*CW}$ を次のように定義する。

〔定義 6〕

区間 A, B の間の順序 $A \leq_{*CW} B$ を次のように定義する。

$$A \leq_{*CW} B \Leftrightarrow a_C \leq b_C, a_w \leq b_w \quad (20)$$

この定義は, 損失の期待値と考えることのできる区間の中心とそのあいまいさを表わす区間の幅が共に小さい方が選好されることを表わしており, 前節の順序 $\leq_{CW}$ の定義とは異なることに注意されたい。

ここで定義した二つの順序 $\leq_{*LR}, \leq_{*CW}$ は互いに矛盾することはなく, 前節の定理 1 と同様に次の定理が成り立つ。

〔定理 3〕

2つの閉区間 A, B が与えられたとき, $A \leq_{*LR} B$ かつ $B \leq_{*CW} A$ となる必要十分条件は, $A = B$ である。

この定義は, 定理 1 と同様にして証明できるので, 証明は省略する。

さらに, 順序 $\leq_{*RC}$ を次のように定義する。

〔定義 7〕

区間 A, B の間の順序 $A \leq_{*RC} B$ を次のように定義する。

$$A \leq_{*RC} B \Leftrightarrow a_R \leq b_R, a_C \leq b_C \quad (21)$$

この順序 $\leq_{*RC}$ と順序 $\leq_{*LR}, \leq_{*CW}$ の間には, 定理 2 と同様に次の関係が成り立つ。

〔定理 4〕

区間に対する三つの順序 $\leq_{LR}$, $\leq_{CW}$, $\leq_{RC}$ の間に次の関係が成り立つ。

$$A \leq_{LR} B \text{ or } A \leq_{CW} B \Leftrightarrow A \leq_{RC} B \quad (22)$$

この定理は、定理 2 と同様にして証明できるので、証明は省略する。

これまでに定義した区間に対する順序の間には、次の関係が成り立つ。

〔定理 5〕

区間に対する順序 $\leq_{LR}$, $\leq_{CW}$, $\leq_{LC}$, $\leq_{*LR}$, $\leq_{*CW}$, $\leq_{*RC}$ の間に、次の関係が成り立つ。

$$A \leq_{LR} B \Leftrightarrow -B \leq_{*LR} -A \quad (23)$$

$$A \leq_{CW} B \Leftrightarrow -B \leq_{*CW} -A \quad (24)$$

$$A \leq_{LC} B \Leftrightarrow -B \leq_{*RC} -A \quad (25)$$

(証明)

この定理は、それぞれの順序の定義より明らかであるので、式(25)のみを証明する。式(23), (24)の関係も同様にして証明できる。

まず、二つの区間 A' , B' を $A' = -A$, $B' = -B$ とすると、定義 1 の区間演算より次の関係が成り立つ。

$$A' = [a'_L, a'_R] = [-a_R, -a_L] = -A \quad (26)$$

$$A' = \langle a'_C, a'_W \rangle = \langle -a_C, a_W \rangle = -A \quad (27)$$

$$B' = [b'_L, b'_R] = [-b_R, -b_L] = -B \quad (28)$$

$$B' = \langle b'_C, b'_W \rangle = \langle -b_C, b_W \rangle = -B \quad (29)$$

ここで、式(25)の $(-A)$, $(-B)$ を A' , B' で置き換えた次式を証明する。

$$A \leq_{LC} B \Leftrightarrow B' \leq_{*RC} A' \quad (30)$$

(1) $A \leq_{LC} B$ のとき、 $B' \leq_{*RC} A'$ が成り立つことを示す。

$A \leq_{LC} B$ の定義より、次の関係が成り立つ。

$$a_L \leq b_L, a_C \leq b_C \quad (31)$$

したがって、

$$a'_R = -a_L \geq -b_L = b'_R \quad (32)$$

$$a'_C = -a_C \geq -b_C = b'_C \quad (33)$$

となり、 $B' \leq_{*RC} A'$ が成り立つ。

(2) $B' \leq_{*RC} A'$ のとき、 $A \leq_{LC} B$ が成り立つことを示す。

$B' \leq_{*RC} A'$ の定義より、次の関係が成り立つ。

$$a'_R \geq b'_R, a'_C \geq b'_C \quad (34)$$

したがって、

$$a_L = -a'_R \leq -b'_R = b_L \quad (35)$$

$$a_C = -a'_C \leq -b'_C = b_C \quad (36)$$

となり、 $A \leq_{LC} B$ が成り立つ。

(証明終り)

この定理より、順序 $\leq_{LR}$, $\leq_{CW}$, $\leq_{LC}$ を用いて区間目標関数の最大化を行うことは、最大化されるべき区間目標関数にマイナスの符号をつけた目標関数を、順序 $\leq_{*LR}$, $\leq_{*CW}$, $\leq_{*RC}$ を用いて最小化することと等価であることがわかる。3 章以降では、区間目標関数の最大化のみについて考察するが、そこで得られた結果は、最大化問題に対する順序 $\leq_{LR}$, $\leq_{CW}$, $\leq_{LC}$ を最小化問題に対する順序 $\leq_{*LR}$, $\leq_{*CW}$, $\leq_{*RC}$ に置き換えることにより、そのまま区間目標関数の最小化に適応することができる。

3. 区間 0-1 計画問題

本章では、製品選択問題を対象として区間目標関数を持つ 0-1 計画問題を定式化し、その解析および解法の提案を行う。ここで提案する手法は、次の 4 章において、選択の対象となる製品の需要量が区間として予測される場合での製品選択問題に応用される。

3.1 問題の設定

最も単純な製品選択問題は、0-1 ナップサック問題として定式化できる。このとき、各製品から得られる利潤が区間として与えられるならば、製品選択問題は、次のような区間 0-1 計画問題として定式化できる。

〔問題 P〕

$$\text{目標関数: } Z = \sum_{j=1}^n A_j x_j \quad (\text{最大化}) \quad (37)$$

$$\text{制約条件: } \sum_{j=1}^n b_j x_j \leq s \quad (38)$$

$$x_j = 0 \text{ or } 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (39)$$

決定変数: x_j , $j = 1, 2, \dots, n$

ここに、変数 x_j は、製品 j を採択するときに 1、採択しないときに 0 となる 0-1 変数である。また、係数 A_j は製品 j から得られる利潤を表わす区間係数、 b_j は製品 j を生産するのに必要な生産資源量を表わす係数、 s は生産資源の総量である。

この問題のような区間目標関数を持つ問題では、区間目標関数の最大化という概念が問題となる。本研究では、区間目標関数の最大化は、区間利得の間での選好を表わす順序関係 $\leq_{LR}$, $\leq_{CW}$ に基づき行われるとし、次節でこの問題の解集合を定義する。

3.2 解集合の定義

問題 P における区間目標関数の最大化は、区間に対する順序 $\leq_{LR}$, $\leq_{CW}$ に基づき行われるとする。このとき、この二つの順序に関して共に最大値を与えるような実行可能解が存在すれば、明らかに問題 P の最適解となる。しかし、順序 $\leq_{LR}$, $\leq_{CW}$ はどちらも半順序であるので、このような最大値による最適解が得られない問題も数多く存在する。そこで、問題 P の解を、半順序集合の極大元〔7〕により定義する。一般に集合論では、半順序集合の極大元は次のように定義されている。すなわち、半順

序集合 $(Q, \leq)$ が与えられたとき、 a が集合 Q の元で、 $a < x$ となるような Q の元 x が存在しないとき、 a を半順序集合 $(Q, \leq)$ の極大元という。

まず、ベクトル $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とし、ベクトル $\mathbf{x}$ に対応する区間目標関数 Z の値を $Z(\mathbf{x})$ と表わすことにする。また、問題 P のすべての実行可能解 $\mathbf{x}$ により与えられる区間 $Z(\mathbf{x})$ の全体集合を Γ とする。

つまり、集合 Γ を次のように定義する。

$$\Gamma = \{ Z(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \text{ は問題 } P \text{ の実行可能解} \} \quad (40)$$

さらに、半順序集合 $(\Gamma, \leq_{LR})$ の極大元を与える実行可能解 $\mathbf{x}$ の集合を Ψ_{LR} とし、半順序集合 $(\Gamma, \leq_{CW})$ の極大元を与える実行可能解 $\mathbf{x}$ の集合を Ψ_{CW} とする。つまり、集合 Ψ_{LR} 、集合 Ψ_{CW} を次のように定義する。

$$\Psi_{LR} = \{ \mathbf{x} \mid Z(\mathbf{x}) \text{ は半順序集合 } (\Gamma, \leq_{LR}) \text{ の極大元} \} \quad (41)$$

$$\Psi_{CW} = \{ \mathbf{x} \mid Z(\mathbf{x}) \text{ は半順序集合 } (\Gamma, \leq_{CW}) \text{ の極大元} \} \quad (42)$$

このとき、問題 P の解集合を、次のように定義する。

〔定義 8〕

問題 P の解集合を Ψ とし、次のように定義する。

$$\Psi = \Psi_{LR} \cap \Psi_{CW} \quad (43)$$

このように、問題 P の解集合は半順序集合の極大元により定義された二つの集合 Ψ_{LR} 、 Ψ_{CW} の共通集合として定義される。

この解集合は、前節で定義した順序 $\leq_{LC}$ を用いて表現することができる。まず、半順序集合 $(\Gamma, \leq_{LC})$ の極大元を与える実行可能解 $\mathbf{x}$ の集合を Ψ_{LC} とし、次のように定義する。

$$\Psi_{LC} = \{ \mathbf{x} \mid Z(\mathbf{x}) \text{ は半順序集合 } (\Gamma, \leq_{LC}) \text{ の極大元} \} \quad (44)$$

このように定義された集合 Ψ_{LC} は、定義 8 で定義された解集合 Ψ と一致する。すなわち、次の関係が成り立つ。

〔定理 6〕

三つの集合 Ψ_{LR} 、 Ψ_{CW} 、 Ψ_{LC} の間に、次の関係が成り立つ。

$$\Psi_{LR} \cap \Psi_{CW} = \Psi_{LC} \quad (45)$$

(証明)

この定理を証明するために、問題 P の実行可能解の全体集合を Θ とし、式(45)と等価な次の式(46)を証明する。

$$\Theta - (\Psi_{LR} \cap \Psi_{CW}) = \Theta - \Psi_{LC} \quad (46)$$

(1) 集合 $(\Theta - (\Psi_{LR} \cap \Psi_{CW}))$ の任意の元 $\mathbf{x}$ に対し、de Morgan の法則より、次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{x} \in (\Theta - \Psi_{LR}) \cup (\Theta - \Psi_{CW}) \quad (47)$$

したがって、集合 Ψ_{LR} 、 Ψ_{CW} の定義より、次の条件を満たす集合 Θ の元 $\mathbf{x}'$ が存在する。

$$Z(\mathbf{x}) <_{LR} Z(\mathbf{x}') \text{ or } Z(\mathbf{x}) <_{CW} Z(\mathbf{x}') \quad (48)$$

この $\mathbf{x}'$ に対し, 定理 2 より次の関係が成り立つ。

$$Z(\mathbf{x}) <_{LC} Z(\mathbf{x}') \quad (49)$$

ゆえに, $\mathbf{x} \in (\theta - \Psi_{LC})$ となり, 次式が成り立つ。

$$\theta - (\Psi_{LR} \cap \Psi_{CW}) \subset \theta - \Psi_{LC} \quad (50)$$

(2) 集合 $(\theta - \Psi_{LC})$ の任意の元 $\mathbf{x}$ に対し, 集合 Ψ_{LC} の定義より次の条件を満たす集合 θ の元 $\mathbf{x}'$ が存在する。

$$Z(\mathbf{x}) <_{LC} Z(\mathbf{x}') \quad (51)$$

この $\mathbf{x}'$ に対し, 定理 2 より次の関係が成り立つ。

$$Z(\mathbf{x}) <_{LR} Z(\mathbf{x}') \text{ or } Z(\mathbf{x}) <_{CW} Z(\mathbf{x}') \quad (52)$$

ゆえに, $\mathbf{x} \in (\theta - (\Psi_{LR} \cap \Psi_{CW}))$ となり, 次式が成り立つ。

$$\theta - \Psi_{LC} \subset \theta - (\Psi_{LR} \cap \Psi_{CW}) \quad (53)$$

よって, 式(50)および式(53)より式(46)が成り立つ。 (証明終り)

この定理より, 定義 8 で定義された問題 P の解集合 Ψ が半順序集合 $(\Gamma, \leq_{LC})$ の極大元により定義された集合 Ψ_{LC} と一致することがわかる。

3.3 多目的計画問題との関係

前節の定理 6 より, 問題 P の解集合 Ψ は集合 Ψ_{LC} と一致することがわかった。

一方, 式(37)の区間係数 A_j の左端と中心をそれぞれ a_{Lj} , a_{Cj} とすると, 区間目標関数 Z の左端 z_L と中心 z_C は次式により与えられる。

$$z_L = \sum_{j=1}^n a_{Lj} x_j \quad (54)$$

$$z_C = \sum_{j=1}^n a_{Cj} x_j \quad (55)$$

このとき, 区間に対する順序 $\leq_{LC}$ の定義より明らかなように, 半順序集合 $(\Gamma, \leq_{LC})$ の極大元により定義された集合 Ψ_{LC} は, 区間目標関数 Z の左端 z_L の最大化と中心 z_C の最大化を二つの目標として持つ, 次に示す多目的計画問題の非劣解集合と一致する。

〔問題 MP〕

目標関数: z_L, z_C (最大化)

$$\text{制約条件: } \sum_{j=1}^n b_j x_j \leq s \quad (38)$$

$$x_j = 0 \text{ or } 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (39)$$

決定変数: $x_j, j = 1, 2, \dots, n$

もちろん, この問題の制約条件および決定変数は, 問題 P と同じものである。

この多目的計画問題の非劣解集合が, 定義 8 による問題 P の解集合 Ψ と一致することから, 解集合 Ψ に関して, 次の性質が成り立つ。

〔性質 1〕

解集合 Ψ には、各代替案について最悪の事態を予想し、そのなかで最良の案を選ぶという意思決定基準であるマクシミン基準による問題 P の解が含まれている。

〔性質 2〕

解集合 Ψ には、区間目標関数 Z の中心を利得の期待値と考えたとき、期待利得最大化基準による問題 P の解が含まれている。

性質 1 は、多目的計画問題の目標の一つが区間目標関数 Z の左端、すなわち下限値 z_L の最大化であることから導かれ、性質 2 は、もう一つの目標が区間目標関数 Z の中心 z_C の最大化であることから導かれる。この二つの性質からも、定義 8 による解集合 Ψ が問題 P の解集合として妥当であることがわかる。

3.4 解法アルゴリズム

ここでは、問題 P の解集合 Ψ 、つまり半順序集合 $(\Gamma, \leq_{LC})$ の極大元により定義された集合 Ψ_{LC} を求めるために、分枝限定法〔4〕を用いたアルゴリズムを提案する。このアルゴリズムは、二つの目標を持つ多目的計画問題 MP の非劣解集合を求めるアルゴリズムでもある。

ここで提案するアルゴリズムは、パーソナルコンピュータで実行することを前提としており、またプログラム化が容易なことを第一の目的としたものであるため、非常に簡単な構造となっている。すなわち、通常の 0-1 ナップサック問題に対する LP 緩和問題を用いた分枝限定法を、順序 $\leq_{LC}$ を用いて区間目標関数の場合に拡張したものである。一般的な多目的 0-1 計画問題の解法については、Kiziltan 等〔5〕, Rasmussen〔10〕などを、さらにより一般的に多目的整数計画問題の解法については、Chalmet 等〔1〕, Gabbani 等〔2〕, Klein 等〔6〕, Ramesh 等〔9〕などを参照されたい。

ここでは、まず問題 P の解集合 Ψ を求めるための分枝限定法の諸操作について述べ、次にアルゴリズムとしてまとめたものを示すことにする。

（1）分枝操作

分枝限定法を用いて 0-1 問題を解く場合では、0-1 変数を 0 と 1 とに固定することにより、部分問題が生成される。特に、制約条件が一つの 0-1 ナップサック問題では、一般に単位制約量当りの利潤（利潤率）の大きい順に分枝する変数を選んでゆく。ところで、本研究における区間 0-1 問題では、この単位制約量当りの利潤は、区間 $R_j = A_j/b_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) として与えられる。そこで、この区間利潤率 R_j を用いて次のように変数の並び換えを行なう。

〔変数の並び換え規則〕

全ての相異なる i, j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) に対し、 $R_i \leq_{LC} R_j$ ならば $i \geq j$ となるように 0-1 変数 x_j の添字を付け換える。

このような並び換えを行った後、0-1 変数 x_j を $x_1, x_2, \dots, x_n$ の順に分枝変数として選び、0 と 1 とに固定してゆくことにする。このようにして、0-1 変数が x_1 から x_k まで、それぞれ $x_1', x_2', \dots, x_k'$ に固定された部分問題は、次のように表現することができる。

〔部分問題 P_i 〕

$$\text{目標関数: } Z = \sum_{j=1}^k A_j x_j' + \sum_{j=k+1}^n A_j x_j \quad (\text{最大化}) \quad (56)$$

$$\text{制約条件: } \sum_{j=1}^k b_j x_j' + \sum_{j=k+1}^n b_j x_j \leq s \quad (57)$$

$$x_j = 0 \text{ or } 1, j = k+1, \dots, n \quad (58)$$

決定定数: $x_j, j = k+1, \dots, n$

この部分問題が終端されなければ、さらに x_{k+1} を 0 と 1 とに固定することにより 2 つの部分問題が生成される。

(2) 探索法

探索法として深さ優先探索を用い、同じ深さの部分問題では、1 に固定された変数が多い方から分枝を行う。

(3) 部分問題の上限の計算

部分問題 P_i における区間目標関数 Z の左端 z_L と中心 z_C の上限を計算するため、次に示す線形計画問題を用いることにする。

〔問題 LP_i 〕

$$\text{目標関数: } z = \sum_{j=1}^k a_j x_j' + \sum_{j=k+1}^n a_j x_j \quad (\text{最大化}) \quad (59)$$

$$\text{制約条件: } \sum_{j=1}^k b_j x_j' + \sum_{j=k+1}^n b_j x_j \leq s \quad (60)$$

$$0 \leq x_j \leq 1, j = k+1, \dots, n \quad (61)$$

決定変数: $x_j, j = k+1, \dots, n$

この問題において、係数 a_j を $a_j = a_{Lj}$ と置けば、部分問題 P_i における区間目標関数 Z の左端 z_L に対する上限値 z_L^U が得られ、係数 a_j を $a_j = a_{Cj}$ と置けば、中心 z_C に対する上限値 z_C^U が得られる。これらの上限値により、部分問題 P_i の上限を表わす区間 Z^U が次のように与えられる。

$$Z^U = \langle z_C^U, z_C^U - z_L^U \rangle \quad (62)$$

この区間は、区間の左端と右端を用いて表わすと次のようになる。

$$Z^U = [z_L^U, 2z_C^U - z_L^U] \quad (63)$$

(4) 部分問題の終端

計算の途中生成された部分問題 P_i が実行可能解を持たなければ、その部分問題に対する分枝操作が打ち切られ、部分問題は終端される。

また、計算途中における暫定解集合を $\tilde{\Psi}$ としたとき、次の条件を満たす $\tilde{\Psi}$ の元 $\mathbf{x}_k$ が存在すれば、その部分問題に対する分枝操作が打ち切られ、部分問題は終端される。

$$Z^U <_{LC} Z(\mathbf{x}_k) \quad (64)$$

以上のことから、問題 P の解集合 Ψ を求めるアルゴリズムは、次のようになる。

〔問題 P の解法アルゴリズム〕

(ステップ1：初期値設定)

暫定解集合 $\tilde{\Psi}$ の初期値を、 $\tilde{\Psi} = \{ \}$ とする。さらに、変数の並び換え規則により、0-1変数 x_j の添字を付け換える。

(ステップ2：分枝操作)

分枝手続により、2つの部分問題を生成する。もし、この2つの部分問題において、全ての0-1変数が固定されていれば、ステップ3へ行く。そうでなければ、ステップ4へ行く。

(ステップ3：暫定解の更新)

生成された2つの部分問題に対し、それぞれ次の順に手続を行い、ステップ5へ行く。

(1) $(x_1', \dots, x_n')$ が問題Pの制約条件を満足しなければ、その部分問題に対するステップ3の手続を終了する。

(2) 暫定解集合 $\tilde{\Psi}$ の少なくとも1つの元 $\mathbf{x}_k$ に対し、 $(x_1', \dots, x_n')$ が次式を満たせば、その部分問題に対するステップ3の手続を終了する。

$$Z(x_1', \dots, x_n') <_{LC} Z(\mathbf{x}_k) \quad (65)$$

(3) 暫定解集合 $\tilde{\Psi}$ に $(x_1', \dots, x_n')$ を加え、次式を満たす $\tilde{\Psi}$ の元 $\mathbf{x}_k$ を $\tilde{\Psi}$ から取り除く。

$$Z(\mathbf{x}_k) <_{LC} Z(x_1', \dots, x_n') \quad (66)$$

(ステップ4：部分問題の評価)

生成された2つの部分問題に対し、それぞれ次の順に手続を行い、ステップ5へ行く。

(1) 部分問題が実行可能解を持たなければ、その部分問題を終端し、その部分問題に対するステップ4の手続を終了する。

(2) 部分問題における区間目標関数 Z の左端と中心の上限値 z_L^U, z_C^U を求めることにより、部分問題の上限を表わす区間 Z^U を求める。

(3) 暫定解集合 $\tilde{\Psi}$ の少なくとも1つの元 $\mathbf{x}_k$ に対して次式が成り立てば、その部分問題を終端する。

$$Z^U <_{LC} Z(\mathbf{x}_k) \quad (67)$$

(ステップ5：探索)

もし、全ての部分問題が終端されていれば、ステップ6へ行く。そうでなければ、次に分枝を行なう部分問題を探索法により求め、ステップ2へ返る。

(ステップ6：計算終了)

計算を終了する。このとき、暫定解集合 $\tilde{\Psi}$ が解集合 Ψ である。

4. 区間需要予測に基づく製品選択問題

ここでは、区間0-1計画問題の応用として、製品選択の対象となる製品の需要量が区間として予測される場合での製品選択問題を定式化し、3章のアルゴリズムを用いてその解集合を求める。

4.1 前提条件

区間需要予測に基づく製品選択に対し、次の前提をおく。

- (1) 製品選択の対象となる製品の種類を n 種類とし、製品を表わす記号を j とする ($j = 1, 2, \dots, n$)。
- (2) 製品 j の需要量は区間 D_j として予測されるとし、実際の需要量 d_j は区間 D_j に含まれるとする。
- (3) 採択した製品の品切れは許されないとし、需要量と生産量は等しくなるとする。
- (4) 製品選択の制約となる生産資源は 1 種類のみであるとし、その総量を s とする。
- (5) 製品 j を採択したときに製品 j から得られる利潤は、需要量 d_j の関数 $f_j(d_j)$ で与えられているとする。ただし、関数 $f_j(d_j)$ は d_j の単調増加関数とする。
- (6) 製品 j の生産に必要な生産資源の量は、需要量 d_j の関数 $h_j(d_j)$ で与えられているとする。ただし、関数 $h_j(d_j)$ は d_j の単調増加関数とする。

製品選択の制約となる生産資源としては、製品選択問題で対象としている計画期間内での総生産時間などが考えられる。

4.2 制約条件

前提条件(3)より品切れが許されないので、採択した製品の生産は生産資源の制約 s 内で行われなければならない。一方、製品の需要量は区間で与えられているので、品切れが起こらないようにするには、需要が区間内で最大である場合を考えなければならない。つまり、区間 D_j を $D_j = [d_{Lj}, d_{Rj}]$ とすると、需要が区間内での最大値 d_{Rj} である場合を想定して製品選択を行なわなければならない。

従って、制約条件は、0 – 1 変数 x_j を用いて次のように表わすことができる。

$$\sum_{j=1}^n h_j(d_{Rj}) x_j \leq s \quad (68)$$

4.3 目標関数

一般的な製品選択問題では、目標関数は製品選択の結果得られる利潤の最大化である。本研究では、製品の需要量が区間として与えられているので、製品選択の結果得られる利潤も次のような区間 Z として予測されることになる。

$$Z = \sum_{j=1}^n f_j(d_j \in D_j) x_j \quad (69)$$

ただし、 $f_j(d_j \in D_j)$ は、次式のように定義された区間である。

$$f_j(d_j \in D_j) = \{ f_j(d_j) \mid d_j \in D_j \} \quad (70)$$

4.4 問題の定式化

以上のことから、区間需要予測に基づく製品選択問題が次のように定式化される。

〔製品選択問題〕

$$\text{目標関数： } Z = \sum_{j=1}^n f_j(d_j \in D_j) x_j \quad (\text{最大化}) \quad (71)$$

$$\text{制約条件: } \sum_{j=1}^n h_j(d_{Rj}) x_j \leq s \quad (72)$$

$$x_j = 0 \text{ or } 1, j = 1, 2, \dots, n \quad (73)$$

決定変数: $x_j, j = 1, 2, \dots, n$

この問題における 0-1 変数 x_j の係数 $f_j(d_j \in D_j)$ は区間係数であり, $h_j(d_{Rj})$ は通常の係数である。これらを簡単のため区間 A_j , 実数 b_j で表わすことにすると, この製品選択問題は 3 章で解析した区間 0-1 計画問題と同じ問題となる。

4.5 数値計算例

製品選択の対象となる製品に関する情報を表 1 に示す。各製品の需要量は区間として予測され, 生産費用関数 $c_j(d_j)$ は固定費付きの線形費用関数であり, 生産に必要な生産資源の量は生産量に比例している。また, 生産資源の総量 s を $s = 230$ [単位] とする。

表 1 製品に関する情報

製品番号	予測需要区間	製品価格	生産費用	必要生産資源量
j	D_j	p_j	$c_j(d_j)$	$h_j(d_j)$
No.	[個]	[千円/個]	[千円]	[単位]
1	[200, 220]	10	$400 + 3d_1$	$0.5d_1$
2	[150, 160]	10	$300 + 3d_2$	$0.5d_2$
3	[100, 110]	20	$800 + 5d_3$	$0.8d_3$
4	[80, 85]	20	$600 + 5d_4$	$0.8d_4$
5	[50, 60]	30	$600 + 8d_5$	$1.2d_5$
6	[35, 60]	35	$600 + 8d_6$	$1.2d_6$

いま, 製品 j から得られる利潤が, 需要量 d_j の関数 $f_j(d_j)$ として次のように与えられているとする。

$$f_j(d_j) = p_j d_j - c_j(d_j), j = 1, 2, \dots, 6 \quad (74)$$

ただし, p_j は表 1 に示すように製品 j の価格である。

上式より, 製品 j を採択したときに得られる利潤の区間 $f_j(d_j \in D_j)$ が次のように算出される。

製品 1 : [1000, 1140] 製品 4 : [600, 675]

製品 2 : [750, 820] 製品 5 : [500, 720]

製品 3 : [700, 850] 製品 6 : [345, 1020]

一方, 各製品の生産に必要な生産資源の必要量は, 表 1 より次のような区間となる。

製品 1 : [100, 110] 製品 4 : [64, 68]

製品 2 : [75, 80] 製品 5 : [60, 72]

製品 3 : [80, 88] 製品 6 : [42, 72]

このことから、表 1 の情報に基づく製品選択問題が、次のような区間 0-1 計画問題として定式化される。

〔製品選択問題〕

目標関数 : $[1000, 1140] x_1 + [750, 820] x_2 + [700, 850] x_3 + [600, 675] x_4$
 $+ [500, 720] x_5 + [345, 1020] x_6$ (最大化)

制約条件 : $110x_1 + 80x_2 + 88x_3 + 68x_4 + 72x_5 + 72x_6 \leq 230$

$x_j = 0 \text{ or } 1, j = 1, 2, \dots, 6$

決定変数 : $x_j, j = 1, 2, \dots, 6$

提案したアルゴリズムにより、解集合 Ψ の元が次のように求められる。

$\Psi = \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \}$

$\mathbf{x}_1 = (0, 1, 0, 1, 1, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 1, 0, 1)$

それぞれの解に対応した利潤の区間 Z は、次のようになる。

$Z(\mathbf{x}_1) = [1850, 2215] = \langle 2032.5, 182.5 \rangle$

$Z(\mathbf{x}_2) = [1695, 2515] = \langle 2105, 410 \rangle$

つまり、製品 2, 4, 5 を採択したときの予測利潤は、区間 $[1850, 2215]$ となり、確実に 1850 [千円] 以上の利潤が得られるが、中心値は 2032.5 [千円] である。一方、製品 2, 4, 6 を採択すると、利潤は区間 $[1695, 2515]$ となり、期待される利潤の中心値は 2105 [千円] であるが、最悪の場合は 1695 [千円] の利潤となる。この 2 つの代替案は、2 章で定義した二つの順序 $\leq_{LR}, \leq_{CW}$ では比較不可能であり、どちらを選ぶかは完全に意思決定者に委ねられる。

さらに、提案した解法の有効性を示すため、表 2 に示すような 15 個の変数を持つ区間 0-1 計画問題に対し、提案したアルゴリズムを用いて解集合を求めた。表 2 には、製品 j より得られる利潤の区間 $A_j = [a_{Lj}, a_{Rj}]$ と、製品 j の生産に必要な生産資源量 b_j が与えられている。また、利用可能な生産資源の総量 s は、 $s = 100$ である。この問題に対し、3 章のアルゴリズムを用いて解集合を求めたときの計算時間は、16 ビットパソコン PC 98-VX 21 を用いた BASIC コンパイラーによる計算で 22 秒であり、生成された部分問題の数は 1050 個であった。この計算の結果、次のような解集合および対応する目標関数の区間が得られた。

$\Psi = \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \}$

$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$

$\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$

$\mathbf{x}_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$

$Z(\mathbf{x}_1) = [1020, 1260] = \langle 1140, 120 \rangle$

$Z(\mathbf{x}_2) = [1010, 1330] = \langle 1170, 160 \rangle$

$$Z(\mathbf{x}_3) = [1030, 1190] = \langle 1110, 80 \rangle$$

表 2 区間 0-1 計画問題 ($s = 100$)

製品番号 j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_{Lj}	100	120	120	100	150	150	180	160	180	230	200	250	300	290	300
A_j															
a_{Rj}	150	140	170	170	160	250	190	260	260	240	270	280	310	340	330
b_j	10	12	12	14	15	15	16	18	20	23	25	26	28	32	35

5. 結 言

本研究では、次のことを行った。

(1) 区間に対する選好を表わす順序関係を、最大化問題と最小化問題に対し、それぞれ区間の左端と右端および区間の中心と幅により定義した。そして、区間の左端と右端および区間の中心と幅により定義された二つの順序関係が、最大化問題の場合では区間の左端と中心で、最小化問題の場合では区間の右端と中心で定義された第三の順序関係により表現されることを示した。

(2) 区間目標関数を持つ区間 0-1 計画問題を定式化し、その解集合を、提案した順序関係に基づく半順序集合の極大元により定義した。さらに、この解集合を求めるため、分枝限定法を用いた解法を提案した。

(3) 区間需要予測に基づく製品選択問題を区間 0-1 計画問題として定式化し、数値計算例を示した。

参考文献

- [1] Chalmet, L. G., Lemonidis, L. and Elzinga, D. J.: An algorithm for the bi-criterion integer programming problem, European Journal of Operational Research, Vol. 25, No. 2, pp. 292-300, (1986)
- [2] Gabbani, D. and Magazine, M.: An interactive heuristic approach for multi-objective integer-programming problems, Journal of the Operational Research Society, Vol. 37, No. 3, pp. 285-291, (1986)
- [3] 人見勝人: 「生産の計画理論」, 有斐閣, pp. 86-110, (1975)
- [4] 茨木俊秀: 「組合せ最適化」, 産業図書, (1983)
- [5] Kiziltan, G. and Yugaoglu, E.: An algorithm for multiobjective zero-one linear programming, Management Science, Vol. 29, No. 12, pp. 1444-1453, (1983)
- [6] Klein, D. and Hannan, E.: An algorithm for the multiple objective integer linear programming problem, European Journal of Operational Research, Vol. 9, No. 4, pp. 378-385, (1982)

- [7] 松坂和夫：「集合・位相入門」，岩波書店，pp.87-97，(1968)
- [8] Negoita, C.V.：The current interest in fuzzy optimization, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 6, No 3, pp.261-269, (1980)
- [9] Ramesh, R., Zionts, S. and Karwan, M.H：A class of practical interactive branch and bound algorithms for multicriteria integer programming, European Journal of Operational Research, Vol.26, No 1, pp.161-172, (1986)
- [10] Rasmussen, L.M.：Zero-one programming with multiple criteria, European Journal of Operational Research, Vol.26, No 1, pp.83-95, (1986)
- [11] 千住鎮雄，伏見多美雄：「経済性工学の応用」，日本能率協会，pp.53-83，(1986)
- [12] Slowinski, R.：A multicriteria fuzzy linear programming method for water supply system development planning, Fuzzy Sets and Systems Vol.19, No 3, pp.217-237,(1986)

石淵久生：〒591

堺市百舌鳥梅町4丁804

大阪府立大学工学部経営工学科

ABSTRACT

Interval 0-1 Programming Problem and Product-Mix Analysis

Hisao Ishibuchi Hideo Tanaka
University of Osaka Prefecture

Recently many fuzzy mathematical programming methods were proposed as the decision making models under uncertainty. Fuzzy mathematical programming problems were formulated by replacing the coefficients of the conventional mathematical programming problems with the fuzzy number coefficients. In the formulations, it is not always easy to give a proper membership function to each fuzzy number coefficient. Thus we formulate a tractable problem called the interval programming problem by regarding the fuzziness of coefficients as intervals.

In this paper, an interval 0-1 programming problem with an interval objective function is formulated and analyzed to deal with a product-mix problem. First, two order relations between intervals are defined to maximize the interval objective function. The order relations are defined by the left and right limits of interval and by the center and width of interval, respectively. Furthermore the modified order relations to minimize the interval objective function are defined. Some properties of these order relations are investigated. Next, the interval 0-1 programming problem is formulated where a solution set is defined by the two order relations between intervals. A computational algorithm using the branch and bound method is proposed to obtain the solution set. Last, the interval 0-1 programming problem is applied to the product-mix problem where the demand of each product to be selected is estimated as an interval.